# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2018



## ΘΕΜΑ Α

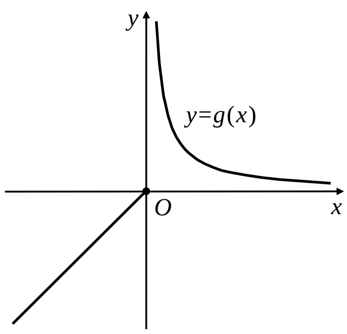
**Α1. Σχολικό σελ. 99**

**Α2.**

**α. Ψευδής**

**β. Σχολικό σελ. 35**

Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x>0 \end{cases}$.




**Α3. Σχολικό σελ. 216**

**Α4.**

**α) Λάθος**
**β) Λάθος**
**γ) Σωστό**
**δ) Σωστό**
**ε) Σωστό**

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $A_f=\Re-\{0\}$.

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $A_f=\Re-\{0\}$ και παραγωγίσιμη με : $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}$, $x\neq 0$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{x^3+8}{x^3}>0\Leftrightarrow x^3(x^3+8)>0$

Επομένως :

| x | $-\infty$ | $-2$ | | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^3+8$ | - | 0 | + | | + |
| $x^3$ | - | | - | | + |
| $f'(x)$ | + | | - | | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | Τ.Μ. | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Η $f$ συνεχής στο $(-\infty,-2]$, παραγωγίσιμη με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-2)$ άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$.

Η $f$ συνεχής στο $[-2,0)$, παραγωγίσιμη με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-2,0)$ άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$.

Η $f$ συνεχής στο $(0,+\infty)$, παραγωγίσιμη με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-2$ το $f(-2)=-3$.

**Β2.** Η $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}$, $x\neq 0$, είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=-\dfrac{24}{x^4}$, $x\neq 0$.

$f''(x)=-\dfrac{24}{x^4}<0$ για κάθε $x\in\Re-\{0\}$, άρα η $f$ κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Η $C_f$ δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

**Β3.** Για <u>κατακόρυφη</u> ψάχνω στο $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$, καθώς $\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=0$ και $x^2>0$ για $x<0$ και $x$ κοντά στο 0.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4}{x^2}=+\infty$. Οπότε η ευθεία $(\varepsilon_1): x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$.

Για <u>πλάγιες – οριζόντιες</u> ψάχνω στο $\pm\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\dfrac{4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)=1$, καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^3}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$.

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

Επίσης :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\dfrac{4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)=1$, καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^3}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$.

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

<u>**2ος Τρόπος**</u> Παρατηρούμε ότι στο $\pm\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$.

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

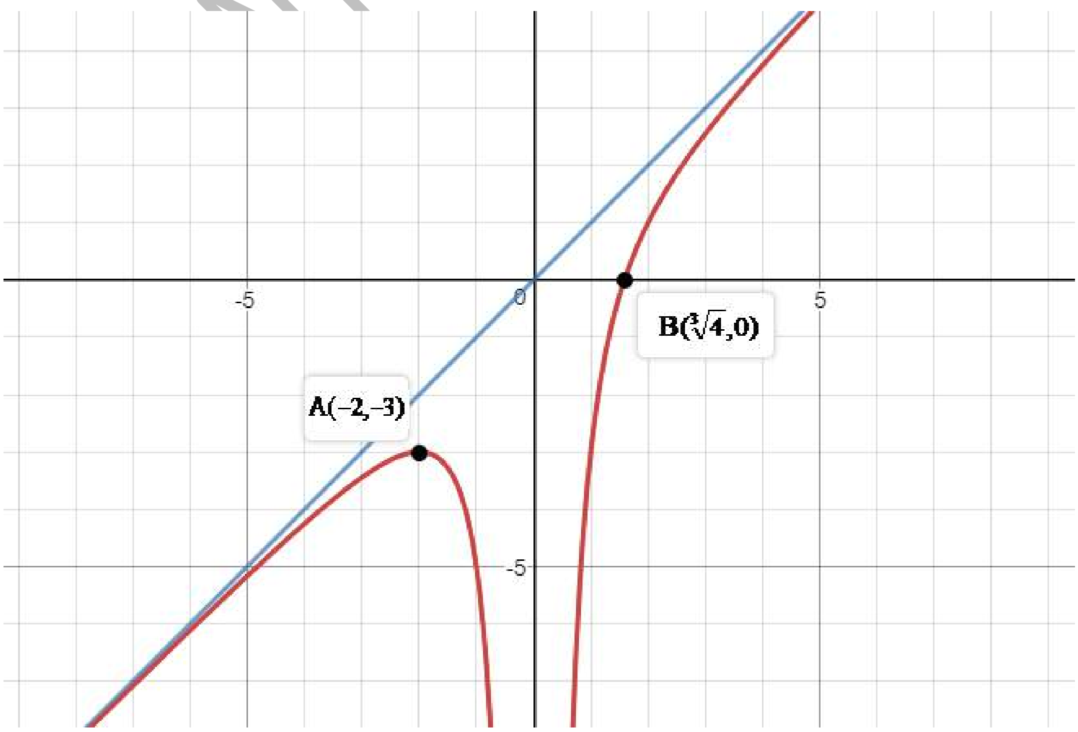
**B4.** Έχουμε :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$, καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right) = +\infty$, καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$, καθώς $\lim\limits_{x\to0^+}x^2=0$ και $x^2>0$ για $x>0$ και $x$ κοντά στο 0. Άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4}{x^2}=+\infty$.
- Σημεία τομής με x΄x : $f(x)=0 \Leftrightarrow x-\dfrac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^3=4 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$. Δηλ. το $A(\sqrt[3]{4},0)$.
- Η $C_f$ δεν τέμνει τον y ΄y καθώς $0\notin A_f$. Επίσης η $f$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ο παρακάτω πίνακας :

<u>Πίνακας μεταβολών :</u>

| x | $-\infty$ | $-2$ | | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | | + |
| $f''(x)$ | - | | - | | - |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | -3 | ↘ | | ↗ |



## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Με το σύρμα μήκους x κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς α=$\frac{x}{4}$ , το οποίο

έχει εμβαδόν $E_1(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2$

Με το υπόλοιπο σύρμα μήκους 8-x κατασκευάζουμε κύκλο μήκους L=2πρ, άρα

$2\pi\rho=8-x \Leftrightarrow \rho=\frac{8-x}{2\pi}$ . Άρα το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου θα είναι

$E_2(x)=\pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$ . Το ολικό εμβαδόν

$$E(x)=E_1(x)+E_2(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{\pi\cdot x^2+4(64-16x+x^2)}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$$

για 0<x<8

**Γ2.** $E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, x∈(0,8), παραγωγίσιμη με

$$E'(x)=\frac{2(\pi+4)x-64x}{16\pi}=\frac{1}{8\pi}\cdot[(4+\pi)\cdot x-32]$$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{32}{4+\pi}$

| X | $0$ | $\frac{32}{4+\pi}$ | $8$ |
|---|---|---|---|
| $E'(x)$ | - | | + |
| E | $\searrow$ | Ελάχιστο | $\nearrow$ |

Η E(x) είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$, παραγωγίσιμη με $E'(x)<0$, για $x\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$, άρα

η E(x) γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$.

Η Ε(x) είναι συνεχής στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$, παραγωγίσιμη με $E'(x)>0$, για $x\in\left(\frac{32}{\pi+4},8\right)$, άρα η Ε(x) γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$.

Η Ε(x) παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0=\frac{32}{4+\pi}$ , άρα η πλευρά του τετραγώνου

$\alpha=\frac{x_0}{4}=\frac{32}{4\cdot(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}$. Τότε η διάμετρος του κύκλου θα είναι

$\delta=2\rho=2\cdot\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{2\pi}=\frac{8\pi}{\pi\cdot(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}$ , άρα $\delta=\frac{x_0}{4}$ .

**Γ3.** Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,8)$ ώστε $E(x_1)=5$ .

$\Delta_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ . Η Ε γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_1$, άρα

$E(\Delta_1)=\left[E(\frac{32}{\pi+4}),\lim\limits_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$

Το $5\in E(\Delta_1)$, αφού $5<\frac{16}{\pi}\Leftrightarrow5\pi<16\Leftrightarrow\pi<3{,}2$ ισχύει όπως και

$\frac{16}{\pi+4}<5\Leftrightarrow16<5\pi+20\Leftrightarrow-4<5\pi$ ισχύει . Η Ε(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1$, άρα το $x_1$ είναι μοναδικό.

$\Delta_2=\left(\frac{32}{\pi+4},8\right)$ . Η Ε γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_2$, άρα

$E(\Delta_2)=\left(E(\frac{32}{\pi+4}),\lim\limits_{x\to8^-}E(x)\right)=\left(\frac{16}{\pi+4},4\right)$ ( Ε συνεχής στο $\frac{32}{\pi+4}$), άρα $5\notin E(\Delta_2)$ .

Άρα το $x_1$ μοναδικό.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in\Re$, $\alpha>1$. Η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με :
$f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$, $x\in\Re$ και $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$, $x\in\Re$.

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2=0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1 \Leftrightarrow x=\alpha$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2>0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}>1 \Leftrightarrow x>\alpha$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2<0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}<1 \Leftrightarrow x<\alpha$

| x | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | - | 0 | + |
| $f$ | $\frown$ | Σ.Κ. | $\smile$ |

Το $\mathrm{A}(\alpha,2-\alpha^2)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της $C_f$.

**Δ2.** Από Δ1. και καθώς η $f'$ είναι συνεχής στο α, έχουμε : $f'\downarrow(-\infty,\alpha]$ και $f'\uparrow[\alpha,+\infty)$ με
$f'(\alpha)=2-2\alpha=2(1-\alpha)<0$ για κάθε $\alpha>1$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=+\infty$, καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-\alpha} \underset{x\to-\infty,u\to-\infty}{\overset{u=x-\alpha}{=\!=\!=\!=}} \lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$.

  και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-\alpha}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2e^{x}\left(\dfrac{1}{e^{\alpha}}-\dfrac{x}{e^{x}}\right)\right]$ (1)

  - $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$

  Άρα : (1)$=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

Στο $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$ η $f'$ γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα :

$f'(\Delta_1)=\left[f'(\alpha),\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=[2(1-\alpha),+\infty)$

Στο $\Delta_2=(\alpha,+\infty)$ η $f'$ γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα :

$f'(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right)=(2(1-\alpha),+\infty)$

καθώς $2(1-\alpha)<0$ για κάθε $\alpha>1$, έχουμε ότι το $0\in f'(\Delta_1)$ και η $f'$ γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\infty,\alpha]$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$. Επίσης : το $0\in f'(\Delta_2)$ και η $f'$ γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in(\alpha,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=0$, με $x_1<x_2$.

- Αν $x<\alpha$

$$x<x_1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x)>0$$

$$x_1<x<\alpha \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x)<0$$

- Αν $x>\alpha$

$$\alpha<x<x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x)<0$$

$$x>x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x)>0$$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $\alpha$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | - | | - | 0 | + |
| $f$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |

Άρα η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2$.

**Δ3. <u>1ος Τρόπος</u>**

Έχουμε ότι $1\in(x_1,x_2)$ όπου από Δ2. η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και ¨1-1¨ καθώς αν $1<x_1$, η $f'\downarrow$ για κάθε $x<\alpha$, άρα $1<x_1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(1)>f'(x_1)=0$ $\quad(f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x)$

Άρα $f'(1)>0 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}-2>0 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}>2 \Leftrightarrow e^{1-\alpha}>1 \Leftrightarrow e^{1-\alpha}>e^0 \Leftrightarrow 1-\alpha>0 \Leftrightarrow 1>\alpha$
Άτοπο.

Έτσι λοιπόν έχουμε : $f(x)=f(1) \overset{f\ "1-1"}{\Longleftrightarrow} x=1$

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει μοναδική λύση στο $(x_1,x_2)$ την $x=1$.

Καθώς, το 1 δεν ανήκει στο $(\alpha,x_2)$, αφού $\alpha>1$, η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη στο $(\alpha,x_2)$.

**<u>2ος Τρόπος</u>**

Παρατηρούμε ότι $f'(1)=2e^{1-\alpha}-2=2\left(e^{1-\alpha}-1\right)<0$, αφού $\alpha>1 \Leftrightarrow 1-\alpha<0 \Leftrightarrow e^{1-a}<1$.

Έτσι : $1\in(x_1,x_2)$ και $\alpha>1$, άρα, $1\in(x_1,\alpha)$. Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και ¨1-1¨, στο $(x_1,x_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει μοναδική λύση τη $x=1$ στο $(x_1,x_2)$. Όμως $1\in(x_1,\alpha)$, άρα συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(\alpha,x_2)$.

**3$^{ος}$ Τρόπος**

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (α, $x_2$), άρα
$f\left((\alpha,x_2)\right)=\left(f(x_2),f(\alpha)\right)=\left(f(x_2),2-\alpha^2\right)$, αφού f συνεχής στα $x_2$, α .

Θα αποδείξουμε ότι f(1)>2-$\alpha^2$$\Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}-1>2-\alpha^2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>0$, για $\alpha>1$ .

Έστω $g(x)=2e^{1-x}+x^2-3,\ x\geq 1$ . Θα δείξουμε ότι g(x)>0, για x>1

Έχουμε g(1)=0 και g παραγωγίσιμη με :
$g'(x)=-2e^{1-x}+2x$ για $x\geq 1$ με $g'(1)=0$. Η $g'$ παραγωγίσιμη με $g''(x)=2e^{1-x}+2>0,\ x\geq 1$

Άρα η g΄(x) γνησίως αύξουσα στο [1,+∞) άρα για
$x\geq 1 \Leftrightarrow g'(x)\geq g'(1) \Leftrightarrow g'(x)\geq 0$, η ισότητα μόνο για $x=1$ και g συνεχής στο 1, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο [1,+∞) δηλαδή
για $x>1 \Leftrightarrow g(x)>g(1) \Leftrightarrow g(x)>0$

**Δ4.** $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2,\ x\in\Re$

$f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x,\ x\in\Re$ είναι f(2)=-2 και f'(2)=-2. Έστω (ε) η εφαπτομένη της $C_f$ στο (2,f(2)) είναι (ε) : y-f(2)=f'(2)(x-2) ⟺ (ε):y=-2x+2.

Από ερώτημα $\Delta_1$ έχουμε ότι η f είναι κυρτή στο [2,3], συνεπώς $f(x)\geq -2x+2,\ x\in[2,3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=2. Επιπλέον έχουμε ότι $\sqrt{x-2}\geq 0,\ x\in[2,3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 2. Άρα

$f(x)\cdot\sqrt{x-2}\geq(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}$ , $x\in[2,3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 2.

Τα μέλη είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [2,3] επομένως

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx>-2\int_2^3 x\cdot\sqrt{x-2}\,dx+2\int_2^3\sqrt{x-2}\,dx \qquad (2)$$

- $\int_2^3 x\cdot\sqrt{x-2}\,dx$ θέτω u=x-2, άρα du=dx και για x=2, u=0 και για x=3, u=1

$$\int_0^1(u+2)\sqrt{u}\,du=\int_0^1 u\cdot\sqrt{u}\,du+2\int_0^1\sqrt{u}\,du=\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}du+2\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}du=\frac{2}{5}[u^{\frac{5}{2}}]_0^1+2\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^1=\frac{2}{5}+2\cdot\frac{2}{3}=\frac{26}{15}$$

- $\int_2^3\sqrt{x-2}\,dx=\int_2^3(x-2)'\cdot(x-2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}\left[(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3=\frac{2}{3}$

Άρα η (2) : $\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx>-2\cdot\frac{26}{15}+2\cdot\frac{2}{3}=-\frac{32}{15}$