ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1.
α. Σχολικό σελ. 15
β.
i. Σχολικό σελ. 35
ii. Σχολικό σελ. 36

Α2. Σχολικό σελ. 142

Α3. Σχολικό σελ. 135

Α4.
α. Λάθος

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1\,, & x<0\\ 1\,, & x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

β. Λάθος

Ο ισχυρισμός θα ήταν σωστός, αν η f ήταν συνεχής στο x_0. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}\,, & \alpha\nu\ \ x\neq 1\\ 3\,, & \alpha\nu\ x=1\end{cases}$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$

Ενώ $f(1)=3$.

Α5. γ)

ΘΕΜΑ Β

$$f(x)=e^{-x}+\lambda \quad , \quad \lambda\in\Re \ , \quad A_f=\Re$$

Β1. Για να έχει η γραφική παράσταση της f οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$, πρέπει : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)\underset{\substack{x\to+\infty\\ u\to-\infty}}{\overset{-x=u}{=}}\lim_{u\to-\infty}(e^{u}+\lambda)=0+\lambda=\lambda$$

Άρα $\lambda=2$.

Οπότε, $f(x)=e^{-x}+2 \quad , \quad x\in\Re$.

Β2. Έστω $g(x)=f(x)-x=e^{-x}+2-x \quad , \quad x\in\Re$.

Η g συνεχής στο $[2,3]$, ως πράξεις και συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων.

$g(2)=e^{-2}+2-2=e^{-2}>0$

$g(3)=e^{-3}+2-3=e^{-3}-1=\dfrac{1}{e^{3}}-1<0$

Άρα $g(2)\cdot g(3)<0$. Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

Επιπλέον, η g είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\Re$,

με $g'(x)=e^{-x}(-1)-1=-e^{-x}-1<0 \quad , \quad$ για κάθε $x\in\Re$.

Άρα η g γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

Επομένως, η ρίζα του θεωρήματος Bolzano είναι μοναδική.

Β3. $f(x)=e^{-x}+2$, $x\in\Re$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\Re$ με $f'(x)=-e^{-x}<0$, για κάθε $x\in\Re$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$, άρα η f είναι «1-1», συνεπώς είναι και αντιστρέψιμη.

- Για κάθε $x\in\Re$, θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2 \quad (\ y-2>0 \Leftrightarrow y>2\ )$

  Οπότε έχουμε: $\ln e^{-x}=\ln(y-2) \Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$, $\quad y>2$

  Όμως $x\in\Re$ άρα $-\ln(y-2)\in\Re$ που ισχύει για κάθε $y>2$.

  Άρα $f^{-1}(y)=-\ln(y-2)$, $y>2$

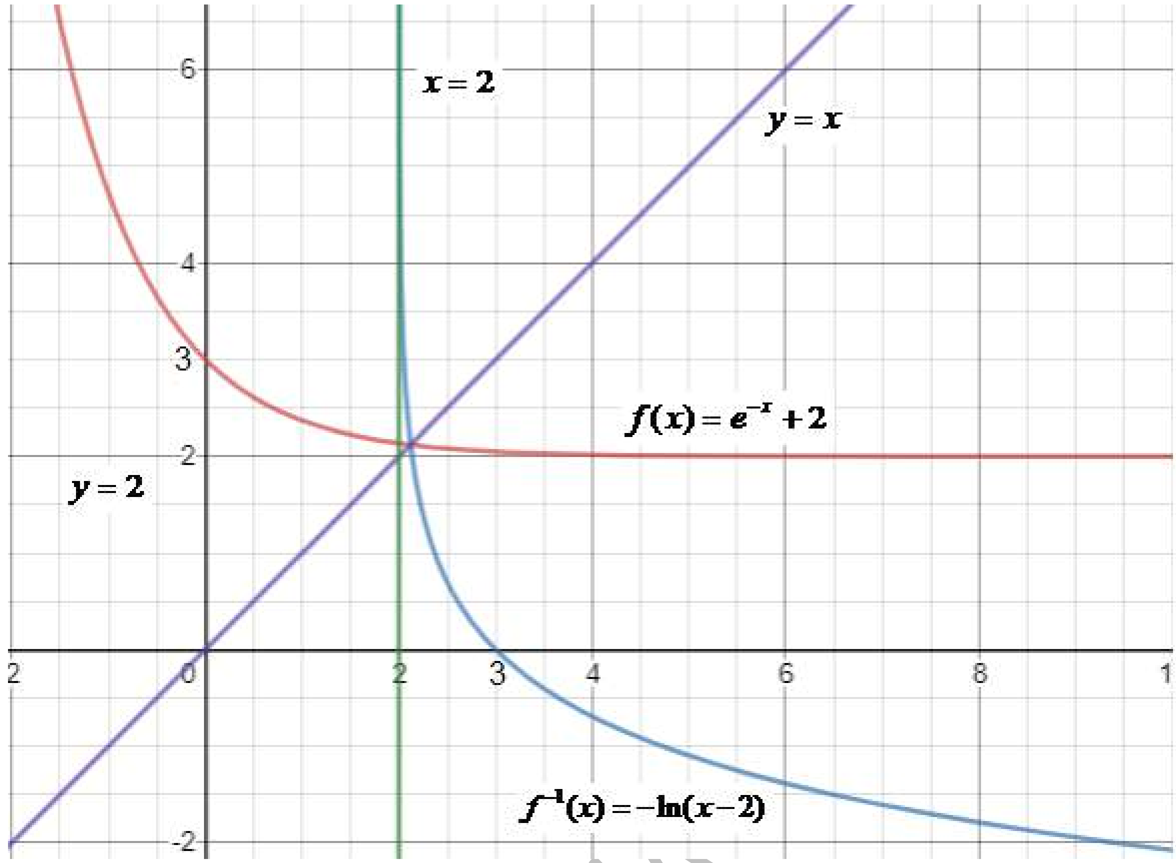
  Δηλαδή, $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$.

Β4. $A_{f^{-1}}=(2,+\infty)$, η f είναι συνεχής στο $(2,+\infty)$, έτσι για κατακόρυφη ασύμπτωτη ελέγχουμε στο $x_0=2$.

Έχουμε, $\lim\limits_{x\to2^{+}} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^{+}}[-\ln(x-2)]\underset{\substack{x\to2^{+}\\ u\to0^{+}}}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^{+}}(-\ln u)=-(-\infty)=+\infty$.

Άρα η ευθεία (ε) : $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ προκύπτουν από κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις, αντίστοιχα, των βασικών συναρτήσεων $y=e^{-x}$ και $y=-\ln x$, έτσι έχουμε :



Η C_f προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της $y=e^{-x}$ κατά δύο μονάδες προς τα πάνω.

Η $C_{f^{-1}}$ προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $y=-\ln x$ κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά. (Η $y=-\ln x$ είναι συμμετρική της $y=\ln x$ ως προς τον άξονα x΄x.)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f παραγωγίσιμη στο 1, θα είναι και συνεχής στο 1 δηλαδή $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow$

$1+\beta=1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta$ (1)

- $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+ax-(1+a)}{x-1}\overset{D.L.H}{=}$$
  $$=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+a}{1}=1+a$$
- $$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+a-(1-a)}{x-1}=$$
  $$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow a=1$ και από την (1) έχουμε β=1

Γ2. Η $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x & x<1 \end{cases}$

- Για x>1 $f'(x)=2x>0$
- Για x<1 $f'(x)=e^{x-1}+1>0$

Καθώς $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι στο 1 θα είναι γνησίως αύξουσα στο R

Στο $A=(-\infty,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής .

Άρα $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\Re$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)\overset{u=x-1}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(e^{u}+u+1\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

Γ3. i) Στο $A_1=(-\infty,0)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής

Άρα $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to0^-} f(x)\right)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$

Το $0\in f(A_1)$ και καθώς η f γνησίως αύξουσα στο $A_1\subseteq\Re$ υπάρχει μοναδική ρίζα στο $x_o\in(-\infty,0)$ της εξίσωσης $f(x)=0$

ii) $f^2(x)-x_0f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$ (2)

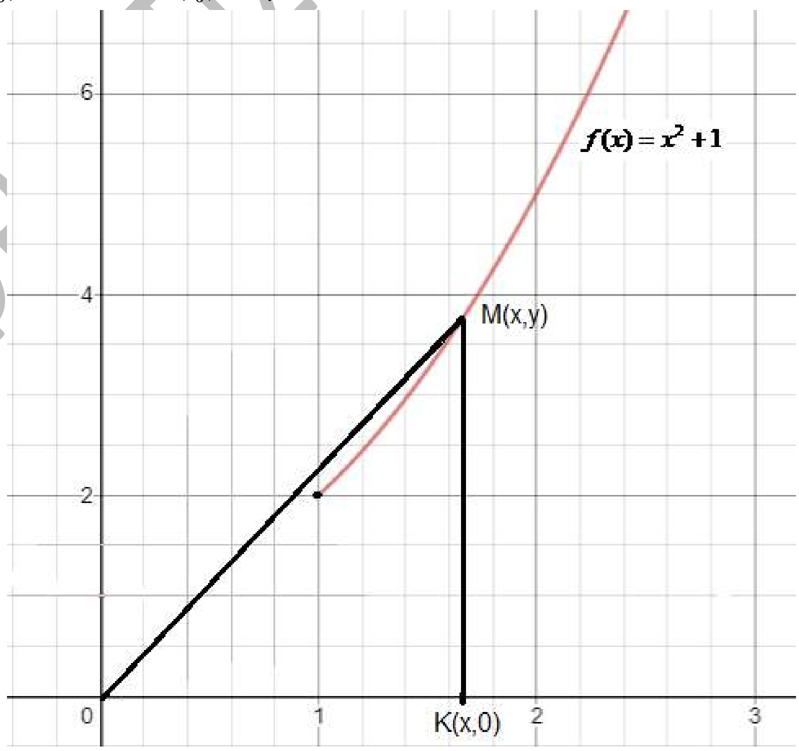
Καθώς $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in(x_0,+\infty)$ από το ερώτημα (i) η (2)$\Leftrightarrow f(x)-x_o=0\Leftrightarrow f(x)=x_0<0$ (3)

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο $[x_0,+\infty)$

$x>x_0 \overset{f\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0$

Δηλ. $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0+\infty)$ και η (3) είναι αδύνατη

Γ4. $x(t_0)=3$ και $y(t_0)=10$ και $x'(t_0)=2\mu o\nu/\sec$



Είναι $E_{MOK} = \frac{1}{2}xf(x) = \frac{x^3 + x}{2}$

Άρα $E_{MOK}(t) = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}$

$E'_{MOK}(t) = \frac{3x^2(t)x'(t) + x'(t)}{2}$ για $t = t_0$ έχουμε

$E'_{MOK}(t_0) = \frac{3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 2 + 2}{2} = 28\mu o\nu^2 / \sec$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = (x-1)\cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta,\ D_f = \mathbb{R}$

Η ευθεία (ε) $y = -x + 2$ εφάπτεται της C_f στο Α(1,1) άρα f(1)=1 και f'(1)=-1.

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1)\cdot \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha = \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2}{(x-1)^2 + 2} + \alpha$$

$f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1,\quad$ άρα $\beta = 2$

Και τελικά $f(x) = (x-1)\cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 1,\ D_f = \mathbb{R}$

Δ2. Θεωρώ συνάρτηση $h(x) = f(x) - (-x + 2) = (x-1)\cdot \ln(x^2 - 2x + 2)$

Η h συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον

$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0$

Και x-1≥ 0 για $x \in [1,2]$, άρα $h(x) \geq 0$ για $x \in [1,2]$

$$E = \int_1^2 |h(x)|dx = \int_1^2 h(x)dx = \int_1^2 (x-1)\cdot \ln[(x-1)^2 + 1]dx$$

Θέτουμε u=$(x-1)^2 + 1$ με du=2(x-1) και για $x = 1$, $u = 1$ και για $x = 2,\ u = 2$

$$E = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2}\int_1^2 (u)'\ln u du = \frac{1}{2}\left([u\cdot \ln u]_1^2 - \int_1^2 u\cdot \frac{1}{u}du\right) = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}\text{τ.μ.}$$

Δ3. i.

Α' τρόπος

$$f'(x) = \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1 = \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{(x-1)^2 + 1 - 2}{(x-1)^2 + 1} = \ln[(x-1)^2 + 1] + 1 - \frac{2}{(x-1)^2 + 1}$$

$$f''(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}+\frac{4(x-1)}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}=\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\cdot\left[1+\frac{2}{(x-1)^2+1}\right]$$

Το πρόσημο της f’’ εξαρτάται από το πρόσημο της x-1, αφού $\frac{2}{(x-1)^2+1}\cdot\left[1+\frac{2}{(x-1)^2+1}\right]>0$ για κάθε x∈ℝ.

x	$-\infty$ **1**	$+\infty$
f’’(x)	-	+
f’(x)	↘	↗

Η f’ συνεχής στο $(-\infty,1]$, παραγωγίσιμη με f’’(x)<0 στο $(-\infty,1)$, άρα η f’ γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$.

Η f’ συνεχής στο $[1,+\infty)$, παραγωγίσιμη με f’’(x)>0 στο $(1,+\infty)$, άρα η f’ γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η f’ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1, το f’(1)=-1. Άρα $f'(x)\geq f'(1)\Leftrightarrow f'(x)\geq -1$ για κάθε x $\in\mathbb{R}$.

Β’ τρόπος

$$f'(x)=\ln[(x-1)^2+1]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1$$

$f'(x)\geq -1\Leftrightarrow \ln[(x-1)^2+1]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1\geq -1\Leftrightarrow \ln[(x-1)^2+1]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$ ισχύει για κάθε x $\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1, αφού $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $\ln[(x-1)^2+1]\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1.

Και $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1

ii. $f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq(\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq(\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -1$$

θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$

Η f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$, η f παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$

Άρα $f'(\xi)\geq -1$, ισχύει καθώς $f'(x)\geq -1$ από το προηγούμενο ερώτημα .

Δ4. Η ευθεία (ε) $y=-x+2$ εφάπτεται της C_f στο $A(1,1)$.

Θα δείξουμε ότι η y=-x+2 εφάπτεται της γραφικής παράστασης της

$g(x)=-x^3-x+2$.

Έστω $B(x_0,g(x_0))$ σημείο της γραφικής παραστασης της g. Η εφαπτομένη της C_g στο Β είναι $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$, άρα

$$\begin{cases} g'(x_0)=-1 \\ \text{και} \\ -x_0g'(x_0)+g(x_0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0^2-1=-1 \\ \text{και} \\ -x_0(-3x_0^2-1)-x_0^3-x_0+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0^2=0 \\ \text{και} \\ 3x_0^3-x_0^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=0$$

Και $x_0=0$ μοναδικό . Πράγματι οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν κοινή εφαπτομένη.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κι άλλη κοινή εφαπτομένη σε σημεία $\Gamma(x_1,f(x_1))$ και $\Delta(x_2,g(x_2))$, με $x_1\neq 1$ και $x_2\neq 0$, θα πρέπει να ισχύει $f'(x_1)=g'(x_2)$.

Από προηγούμενο ερώτημα $f'(x)\geq -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1

Επιπλέον $g'(x)=-3x^2-1\leq -1$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, αφού $-3x^2\leq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $f'(x_1)\geq -1 \Leftrightarrow g'(x_2)\geq -1 \Leftrightarrow g'(x_2)=-1 \Leftrightarrow x_2=0$, άτοπο.

.