



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \blacksquare$$

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

A4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

Έστω $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$ με $D_f = \mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό του $\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, άρα από θεώρημα Fermat $f'(1) = 0$.

Όμως $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 12 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$

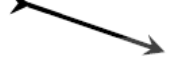
B2.

Έχουμε ότι η $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, με $D_f = \mathbb{R}$, είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

Άρα :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
f'(x)		+	○	-	○	+
f						

Αναζητούμε τρεις θετικές ρίζες οπότε θα βρούμε το σύνολο τιμών των διαστημάτων:

$A_1 = (0, 1]$, $A_2 = (1, 3]$, $A_3 = (3, +\infty)$

- Στο $A_1 = (0, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα :

$$f(A_1) = f((0, 1]) \stackrel{f \nearrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-3, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(0) = -3$$

$$f(1) = 1$$

- Στο $A_2 = (1, 3]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα :

$$f(A_2) = f((1, 3]) \stackrel{f \searrow}{=} \left(f(3), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right] = (-3, 1]$$

$$f(3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(1) = 1$$

- Στο $A_3 = (3, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα :

$$f(A_3) = f((3, +\infty)) \stackrel{f \nearrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-3, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Επειδή το $0 \in f(A_1)$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $A_1 = (0,1] \subseteq (-\infty,1]$, δηλαδή υπάρχει $x_1 \in (0,1]$ ώστε $f(x_1)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$, η ρίζα είναι μοναδική (1).

Όμοια το $0 \in f(A_2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $A_2 = (1,3]$, δηλαδή υπάρχει $x_2 \in (1,3]$, ώστε $f(x_2)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = (1,3]$, η ρίζα είναι μοναδική (2).

Τέλος το $0 \in f(A_3)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $A_3 = (3,+\infty)$, δηλαδή υπάρχει $x_3 \in (3,+\infty)$ ώστε $f(x_3)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_3 = (3,+\infty)$, η ρίζα είναι μοναδική (3).

Από (1), (2), (3), η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες θετικές και πραγματικές.

B3.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 6x - 12, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow 6x > 12 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 12 < 0 \Leftrightarrow 6x < 12 \Leftrightarrow x < 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f		Σ.Κ.	

Οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη) στο $(-\infty, 2]$ και προς τα άνω (κυρτή) στο $[2, +\infty)$, ενώ το σημείο $A(2, f(2))$ ή $A(2, -1)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

B4.

Έχουμε $g(x) = x + f(x)$ με $D_g = \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 1 + f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$\varepsilon_1: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$, η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$.

Για $x = 0$: $y - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)$, οπότε η ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$

$\varepsilon_2: y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$, η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$.

Για $x = 0$:

$$\varepsilon_2: y - g(\xi) = g'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow y = g(\xi) - \xi \cdot g'(\xi) \Leftrightarrow y = \xi + f(\xi) - \xi(1 + f'(\xi)) \Leftrightarrow$$

$$y = \xi + f(\xi) - \xi - \xi \cdot f'(\xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)$$

$$\text{Γιατί: } g(\xi) = \xi + f(\xi) \text{ και } g'(\xi) = 1 + f'(\xi)$$

Άρα η ε_2 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ .

Άρα οι ε_1 και ε_2 τέμνονται στον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$, με $\xi \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $(-\infty, 0)$. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών στο $(0, +\infty)$. Η $\sqrt{x}$ είναι συνεχής και η $x^2 + x$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

$$f(0) = 0$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ |x|=x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2.

• $D_f = \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής, άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x)$$

Ισχύει ότι: $|e^x \eta \mu x| \leq e^x \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x$, για κάθε x στην περιοχή του $-\infty$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$.

Επομένως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 0$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ |x|=x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ |x|=x}} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Άρα η C_f έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την $y = x + \frac{1}{2}$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, 0]$.

Η K είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$K(0) = -\frac{1}{2} < 0$$

$$K(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0.$$

$$K(0) \cdot K(-\pi) < 0$$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε

$$K(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}.$$

Δηλαδή η C_f τέμνει την ε σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Έστω σημείο $M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow y = f(x)$ για $x \geq 0$.

Ισχύει ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

$x = x(t)$ και $y = y(t)$ είναι οι συντεταγμένες του σημείου M .

Είναι $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα $x(t) > 0$.

Άρα:

$$y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot (2x(t)x'(t) + x'(t)) = x'(t) \Leftrightarrow \frac{x'(t)(2x(t) + 1)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \stackrel{x'(t) > 0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t) + x(t)} = 2x(t) + 1 \Leftrightarrow 4(x^2(t) + x(t)) = 4x^2(t) + 4x(t) + 1 \Leftrightarrow 4x(t) = 4x(t) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

που είναι άτοπο.

Συνεπώς, δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$, δηλαδή δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .

ΘΕΜΑ Δ

- $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.
- F μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$, άρα $F'(x) = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- $xf(x) = 2F(x)\ln x$ (1), για κάθε $x > 0$.
- Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $\varepsilon: y = 2x$, άρα $f'(1) = 2$.

$$\Delta 1. g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln x \cdot \ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}, x > 0.$$

Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ καθώς εκφράζεται από συνεχείς συναρτήσεις.

Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)e^{\ln^2 x} \cdot 2 \frac{\ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{f(x)x^{\ln x} - xf(x)e^{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - f(x)x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} = 0.$$

Άρα από Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής η συνάρτηση g είναι σταθερή.

$$\Delta 2. \text{ i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{x-1}{\ln x}} \stackrel{f(1)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

Καθώς η (1) για $x=1$ γίνεται: $f(1) = 2F(1)\ln 1 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$.

$$\text{ii) Για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } x \neq 1 \text{ η (1) γίνεται } F(x) = \frac{xf(x)}{2\ln x}$$

Η F είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη, αφού είναι πηλίκο παραγωγίσιμων

συναρτήσεων, άρα και στο 1. Οπότε $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{\ln x} \cdot \frac{x}{2} \right] = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Από ερώτημα Δ1, η g είναι σταθερή, άρα $g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c$

Για $x=1$ έχουμε: $\frac{F(1)}{1} = c \Leftrightarrow c = 1$. Επομένως, $g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0$

Δ3. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με :

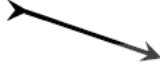
$$F'(x) = (x^{\ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = e^{\ln^2 x} \cdot \frac{2\ln x}{x}, x > 0. \text{ Καθώς } e^{\ln^2 x} \cdot \frac{2}{x} > 0 \text{ για κάθε}$$

$x > 0$, το πρόσημο της F' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο της $\ln x$. Έτσι :

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
F		Ελαχ.	

Άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 = 0$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχει προφανή ρίζα την $x=1$.

- Αν $x > 1$ τότε $x^2 > x$ και F γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα $F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ και $(x-1)^2 > 0$, επομένως $F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$, άρα η εξίσωση $F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 = 0$ δεν έχει ρίζα στο $(1,+\infty)$.
- Αν $0 < x < 1$ τότε $x^2 < x$ και F γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, άρα $F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ και $(x-1)^2 > 0$, επομένως $F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$, άρα η εξίσωση $F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 = 0$ δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Τελικά η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 = 0$ στο $(0,+\infty)$.

Δ4. Η F είναι συνεχής στο $[1,e]$, επομένως $E = \int_1^e |F(x)| dx$.

Η F παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $F(1)=1$, άρα $F(x) \geq F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq 1 > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Οπότε : $E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx$.

$$F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}, \quad x > 0.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$ και το " $=$ " ισχύει μόνο για $x=0$. Θέτοντας όπου x το $\ln^2 x$ έχουμε : $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ για κάθε $x > 0$ και το " $=$ " ισχύει μόνο για $\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x=1$.

$$\text{Επομένως : } \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx \quad (2)$$

- $\int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = [x \cdot \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2 \int_1^e (x)' \ln x dx$
 $= e - 2[x \ln x]_1^e + 2 \int_1^e 1 dx = e - 2e + 2[x]_1^e = -e + 2e - 2 = e - 2$
- $\int_1^e 1 dx = [x]_1^e = e - 1$

Τελικά η σχέση (2) γίνεται : $E = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > e - 2 + e - 1 \Leftrightarrow E > 2e - 3$.