ΒΑΚΑΛΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 31 (Απόδειξη)

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 148 (Ορισμός)

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 96 (Ορισμός)

Α4. **α)** Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Κατασκευάζοντας το πολύγωνο αθρ. σχετ. συχνοτήτων βρίσκουμε δ=25 λεπτά.

Β2. Από το ιστόγραμμα αθρ. σχετ. συχνοτήτων έχουμε c=10 και

$$F_2\% = 50$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+4+3\alpha-6}{7\alpha+4}\cdot 100 = 50 \Leftrightarrow \frac{4\alpha-2}{7\alpha+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8\alpha-4 = 7\alpha+4 \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Επομένως v_1=12, v_2=18, v_3=24, v_4=6 και $v=v_1+v_2+v_3+v_4$=60 και με χρήση γνωστών τύπων έχουμε τελικά:

Χρόνοι	x_i	ν_i	fi%	Ni	fi%
[5.15)	10	12	20	12	20
[15.25)	20	18	30	30	50
[25.35)	30	24	40	54	90
[35.45)	40	6	10	60	100
ΣΥΝΟΛΟ		**60**	**100**		

Β3.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{I=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{10\cdot 12 + 20\cdot 18 + 30\cdot 24 + 40\cdot 6}{60} = \frac{1440}{60} = 24'$$

$$S^2 = \frac{1}{60}\sum_{1}^{4}(xi - \bar{x})^2 vi = \frac{(10-24)^2\cdot 12 + (20-24)^2\cdot 18 + (30-24)^2\cdot 2 + (40-24)^2\cdot 6}{60} =$$

$$= \frac{196\cdot 12 + 16\cdot 18 + 36\cdot 24 + 256\cdot 6}{60} = \frac{5040}{60} = 84$$

$$s = \sqrt{84} \approx 9.17'$$

Β4. Το διάστημα [37,45) είναι το $\frac{8}{10}$ της κλάσης [35,45) και επειδή οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες το ζητούμενο ποσοστό είναι ίσο με $\frac{8}{10}\cdot f4\% = \frac{8}{10}\cdot 10\% = 8\%$

ΥΓ: Θα μπορούσε να υπολογιστεί και από το πολύγωνο με χρήση όμοιων τριγώνων.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα
Γ: ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά
Ι : ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά

Είναι: $P(\Gamma)=\frac{3v}{v^2+1}$ $P(\mathrm{I})=\frac{v+2}{v^2+1}$

Το ενδεχόμενο '' μαθαίνει και τις δύο γλώσσες'' είναι το $\Gamma\cap\mathrm{I}$

Άρα $P(\Gamma\cap\mathrm{I})=\frac{v+1}{v^2+1}$

Το ενδεχόμενο '' μαθαίνει μια τουλάχιστον από τις δυο γλώσσες'' είναι το $\Gamma\cup\mathrm{I}$.

Άρα $P(\Gamma\cup\mathrm{I})=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x}$

Γ1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\ldots\ldots\ldots=1$

Είναι $P(\Gamma\cup\mathrm{I})=1$και ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα είναι $\Gamma\cup\mathrm{I}=\Omega$, Επομένως το $\Gamma\cup\mathrm{I}$ είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2. $P(I\cup\Gamma)=P(I)+P(\Gamma)-P(I\cap\Gamma)\Leftrightarrow\frac{3v+1}{v^2+1}=1\Leftrightarrow v^2-3v=0\Leftrightarrow v=3$, αφού $v\geq3$

Γ3. Για ν=3

$P(I-\Gamma)\cup(\Gamma-\mathrm{I})=P(I\cup\Gamma)-P(I\cap\Gamma)$

$=1-\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

Γ4.

$\mathrm{N}(\Gamma \cap \mathrm{I}) = 32 \quad και \quad P(\Gamma \cap \mathrm{I}) = \frac{2}{5}$

$Από\ κλασικό\ ορισμό\ πιθανότητας$

$P(\Gamma \cap \mathrm{I}) = \frac{2}{5}$

$\frac{\mathrm{N}(\Gamma \cap \mathrm{I})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{2}{5}$

$\mathrm{N}(\Omega) = 80, \alpha φού\ \mathrm{N}(\Gamma \cap \mathrm{I}) = 32$

ΘΕΜΑ Δ

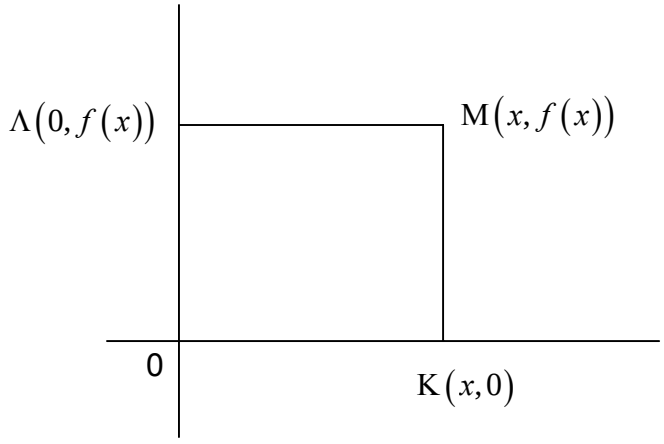
$f(x) = \frac{1+\ln^2 x}{x}, x > 0$

Δ1.

$f'(x) = \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{-(\ln^2 x - 2\ln x + 1)}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2}$

Είναι $x^2>0$ και $(\ln x-1)^2 \geq 0$. Το ‘’=’’ ισχύει μόνο για x=e.
Άρα f’(x)<0 για κάθε $x \neq e$ επομένως f γνησίως φθίνουσα.

Δ2.



$$E=(OK)(O\Lambda)=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ln^2 x}{x}=1+\ln^2 x$$

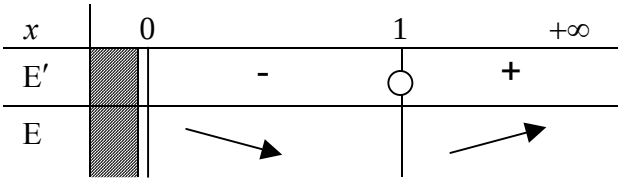
$$Άρα\ \mathrm{E}(x)=1+\ln^2 x\ με\ x>0$$

$$E'(x)=\frac{2\ln x}{x}$$

$$E'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\ln x}{x}=0\Leftrightarrow\ln x=0=\ln 1\Leftrightarrow x=1$$

$$E'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2\ln x}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>0$$

$$\ln x\overset{\ln x\uparrow}{\succ}\ln 1\Leftrightarrow x>1$$



$$E\downarrow(0.1]\ \kappa\ \mathrm{E}\uparrow[1,+\infty)\ άρα\ ελάχιστο\ για\ x=1$$

Τότε (ΟΚ)=1, (ΟΛ)=f(1)=1 επομένως ΟΚΜΛ τετράγωνο

Δ3.

ε: y=λx+β, β ≠ 10 Έστω (n) η εφαπτομένη της c_f στο Σ(1,f(1). Τότε $\lambda_\eta=f'(1)=-1$

ε//n $\Leftrightarrow$ λε=-1. Άρα ε:y=-x+β, β≠ 10

Είναι $y_i=-x_i+\beta$

Από εφαρμογή του σχολικού είναι: $\bar{y}=-\bar{x}+\beta \Leftrightarrow \bar{y}=-10+\beta \; και \; 5y=|-1|5x=2$

Το δείγμα των τεταγμένων είναι ομοιογενές όταν

$$CV_y \le 10\% \Leftrightarrow \frac{5y}{|\bar{y}|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta-10|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$20 \le |\beta-10| \Leftrightarrow \beta-10 \ge 20 \; ή \; \beta-10 \le -20 \Leftrightarrow \beta \ge 30 \; ή \; \beta \le -10$$

Δ4.

Επειδή

$A \ne 0, A \cap B \ne 0, P(A) \ge 0, P(A \cap B) \ge 0$ *και ο δ.χ. αποτελείται από ισοπιθανα απλά ενδεχόμενα είναι*

$P(A)>0$ *και* $P(A \cap B)>0$

Όμως $A \le A \cup B$ *άρα* $0<P(A) \le P(A \cup B)$

$A \cap B \le A \cup B$ *άρα* $0<P(A \cap B) \le P(A \cup B)$

Όμως $f \downarrow (0,+\infty)$ *άρα*

$f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$

$f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $f(P(A))+f(P(A(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$