ΒΑΚΑΛΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
από το 1967

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

# ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

**ΘΕΜΑ Α**
**Α1.** Σχολικό βιβλίο (Σελ. 28).
**Α2.** Σχολικό βιβλίο (Σελ. 14).
**Α3.** Σχολικό βιβλίο (Σελ. 87).
**Α4.** **α)** Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος, **δ)** Λάθος, **ε)** Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.**

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_{2,}\ \omega 3,\omega_4\}$$

$$\mathrm{A}=\{\omega_1\ \omega_4\} \quad \mathrm{B}=\{\omega_1,\omega_3\}$$

$$\mathrm{P}(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x+\cancel{1}-\cancel{1}}{(x^3+x^2)\left(\sqrt{x^3+x+1}+1\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{x}(\cancel{x}+\cancel{1})}{\cancel{x}^2(\cancel{x}+\cancel{1})\left(\sqrt{x^3+x+1}+1\right)}=$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(-1)(1+1)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

$$f(x)=\frac{x}{3}\ln x \qquad x>0$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\ln x+\frac{\cancel{x}}{3}\frac{1}{\cancel{x}}=\frac{1}{3}(\ln x+1)$$

$$\mathrm{P}(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3} \text{ άρα } \mathrm{P}(\omega_1)=\frac{1}{4},\ \ \mathrm{P}(\omega_3)=\frac{1}{3}.$$

**B2.**

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}')=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

$$0\le \mathrm{P}(\mathrm{A}')\le 1$$

$$\mathrm{A}'=\{\omega_2,\omega_3\}$$

και αφού

$$\{\omega_3\}\subseteq \mathrm{A}'$$

$$\mathrm{P}(\omega_3)\le \mathrm{P}(\mathrm{A}')$$

$$\frac{1}{3}\le \mathrm{P}(\mathrm{A}')\ \ (1).$$

και

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}')\le\frac{3}{4}\ \ (2)$$

$$1-\mathrm{P}(\mathrm{A})\le\frac{3}{4}$$

$$-\mathrm{P}(\mathrm{A})\le\frac{3}{4}-1$$

$$-\mathrm{P}(\mathrm{A})\le-\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})\ge\frac{1}{4} \text{ ισχύει}$$

διότι $\{\omega_1\}\subseteq \mathrm{A}$.

Από $(1)$ και $(2)$ $\frac{1}{3}\le \mathrm{P}(\mathrm{A}')\le\frac{3}{4}$

**B3**

$P(A')=\frac{3}{4}$

$P(A)=1-P(A')$

$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+P(\omega_4)$

$P(\omega_4)=0$

$P(\Omega)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)$

$\perp=\frac{1}{4}+P(\omega_2)+\frac{1}{3}+0$

$P(\omega_2)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$

$P(\omega_2)=\frac{12}{12}-\frac{3}{12}-\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$

άρα $P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)$

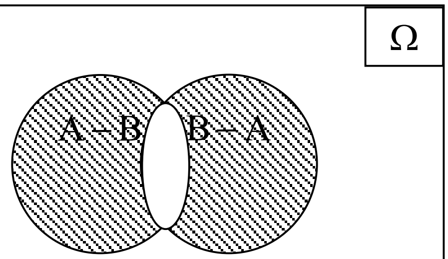
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3+4}{12}=\frac{7}{12}$

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]$

$=P(A-B)+P(B-A)$

$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{7}{12}-2P(A\cap B)$




Διότι $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$
αφού $A-B$ & $B-A$ ξένα μεταξύ τους.

$A\cap B=\{\omega_1\}$

$P(A\cap B)=P(\omega_1)=\frac{1}{4}$

άρα

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=$

$\frac{10}{12}-2\frac{1}{4}=\frac{10}{12}-\frac{1}{2}$

$=\frac{10-6}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$A'=\{\omega_2,\omega_3\}\ B'=\{\omega_2,\omega_4\}$

$A' \cap B' = \{\omega_2\}$

$P(A' - B') =$

$P(A') - P(A' \cap B')$

$= \frac{3}{4} - P(\omega_2)$

$= \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{9-5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$

**ΘΕΜΑ Γ**

$k = 4$

$x_4 = 85$

$f_4 = 2f_3$

$\delta = 75$

$\overline{x} = 74$

**Γ1.**

Αν $c$ το πλάτος τότε οι κλάσεις είναι οι $[50, 50+c), [50+c, 50+2c),$
$[50+2c, 50+3c)$ & $[50+3c, 50+4c)$.

Όμως $x_4 = 85 \Leftrightarrow \frac{50+3c+50+4c}{2} = 85 \Leftrightarrow$

$c = 10$

**Γ2.**

| $[,)$ | xi | fi |
|---|---|---|
| $50-60$ | 55 | 0,1 |
| $60-70$ | 65 | 0,3 |
| $70-80$ | 75 | 0,2 |
| $80-90$ | 85 | 0,4 |
| Σύνολο | | 1 |

$$\left.\begin{matrix} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \\ \text{Όμως } f_4 = 2f_3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3f_3 = 1 \quad (1)$$

$\overline{x} = 74 \Leftrightarrow \Sigma xifi = 74 \Leftrightarrow$

$55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74 \overset{f_4=2f_3}{\Leftrightarrow}$

$55f_1 + 65f_2 + 254f_3 = 74 \quad (2)$

Η διάμεσος είναι $\delta = 75$ και χωρίζει το δείγμα σε δυο ίσα μέρη άρα $50\%$ μικρότερες της διαμέσου και $50\%$ μεγαλύτερες απ’ αυτή.

Επομένως $\frac{1}{2}f_3 + f_4 = \frac{50}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{2}f_3 + 2f_3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{5}{2}f_3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f_3 = 0,2$

$f_4 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$

$(1)\ \ f_1 + f_2 = 0,4$

$(2)\ \ 55f_1 + 65f_2 = 25$

Σύστημα $\frac{f_1 = 0,1}{f_2 = 0,3}$

**Γ3.**

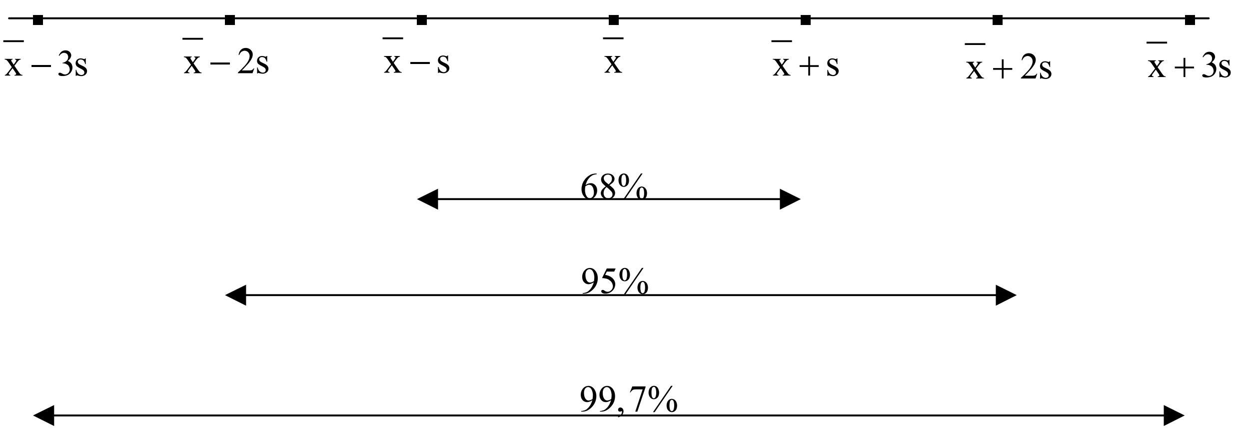
Αν $\overline{x}$ η μέση τιμή τότε:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x} = \dfrac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v - v_4} \\ \\ f_i = \dfrac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = f_i v \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 \cdot v + x_2 \cdot f_2 \cdot v + x_3 \cdot f_3 \cdot v}{v - f_4 \cdot v} =$$

$$\frac{\cancel{v} \cdot \sum_{i=1}^{3} x_i f_i}{\cancel{v}(1 - f_4)} = \frac{40}{0,6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}.$$

**Γ4.**



Είναι $2,5\% = \dfrac{100\% - 95\%}{2}$

Άρα $2,5\%$ το πολύ $\overline{x} - 2s$ και $2,5\%$ τουλάχιστον $\overline{x} + 2s$

Επειδή $2,5\%$ τουλάχιστον $74$ είναι $\overline{x} + 2s = 74 \quad (1)$

Επίσης $16\% = \dfrac{100\% - 68\%}{2}$

Άρα $16\%$ το πολύ $\overline{x} - s$ και $16\%$ τουλάχιστον $\overline{x} + s$

Επειδή $16\%$ το πολύ $68$ είναι $\overline{x} - s = 68 \quad (2)$

Λύνουμε $(\Sigma)$ $(1) \& (2)$: $\overline{x} = 70$

$s = 2$

Άρα $cv = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{2}{70} = \dfrac{1}{35} < \dfrac{1}{10}$ άρα ομοιογενές.

**ΘΕΜΑ Δ**

$f(x) = x\ln x + \kappa, \quad x > 0 \quad \kappa \in \mathbb{R}, \ \kappa > 1.$

**Δ1.**

Το σημείο επαφής είναι το $M(1, f(1))$ ή $M(1, \kappa)$.

Έστω $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$ η εφαπτομένη της $Cf$ στο $M$.

$\lambda = f'(1)$

$f'(x) = \ln x + 1$ άρα $f'(1) = 1$

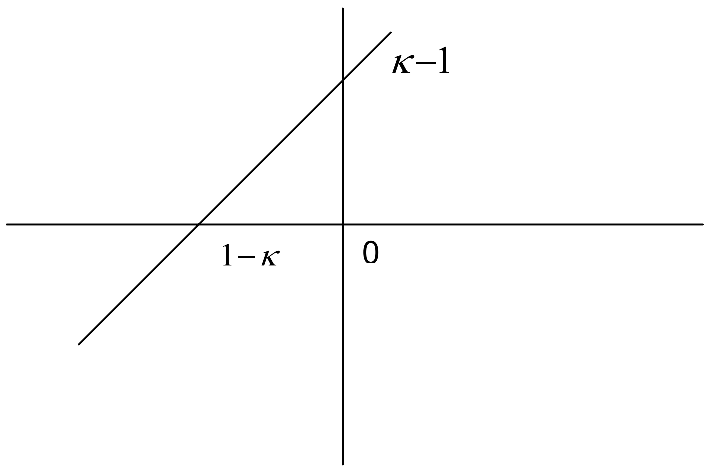
και $\varepsilon : y = x + \beta.$

$M \in \varepsilon \Leftrightarrow \kappa = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \kappa - 1$

δηλ. $\varepsilon : y = x + \kappa - 1.$

Η $(\varepsilon)$ τέμνει τους άξονες για $x = 0 \quad y = \kappa - 1 > 0 \quad (\kappa > 1)$

$y = 0 \quad x = 1 - \kappa < 0 \quad (\kappa > 1).$



$\mathrm{E} = \frac{1}{2}(\kappa-1)\cdot|1-\kappa| = \frac{(\kappa-1)^2}{2}$

$\mathrm{E} < 2 \Leftrightarrow \frac{(\kappa-1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa + 1 < 4 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 < 0$

ρίζες οι $-1$ και $3$

$\alpha = 1 > 0$ άρα $\kappa^2 - 2\kappa - 3 < 0$ για $-1 < \kappa < 3$.

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $\kappa > 1$ άρα $\kappa = 2$.

**Δ2.**

$\overline{y} = 31$

α) Είναι $y_i = x_i + 1 \Leftrightarrow x_i = y_i - 1$

Από εφαρμογή του σχολικού είναι $\overline{x} = \overline{y} - 1 = 31 - 1 \Leftrightarrow \overline{x} = 30$

β) Έστω $z_i$ οι νέες παρατηρήσεις με $i = 1,2,...,50.$

Τότε $z_i = x_i + 3$ με $i = 1,2,...,20$

$z_i = x_i$ με $i = 21,22,...,35$

$z_i = x_i - \lambda$ με $i = 36,37,...,50$

$\overline{z} = \frac{z_1 + z_2 + ... + z_{50}}{50} \Leftrightarrow$

$31 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{20} + 20\cdot 3 + x_{21} + x_{22} + ... + x_{35} + x_{36} + ... + x_{50} - 15\lambda}{50}$

$31 = \frac{\Sigma xi + 60 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow 31 = \frac{\Sigma xi}{50} + \frac{60 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow$

$31 = \overline{x} + \frac{12 - 3\lambda}{10} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}.$

**Δ3.**

| x | 0 | | $1/e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f′ | | − | 0 | + | |
| f | | ↘ | | ↗ | |

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2\cdot e - 1}{e} > 0$

$\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e.\quad \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$

$f(\alpha) = \alpha\ln\alpha + 2 = \ln\alpha^\alpha + 2$

$f(\beta) = \beta\ln\beta + 2 = \ln\beta^\beta + 2$

$f(\gamma) = \gamma\ln\gamma + 2 = \ln\gamma^\gamma + 2$

$$f(e)=e+2$$
$$f'(x)=\ln x+1$$
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$
$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$$

$$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e \overset{f \text{ γνησίως αύξουσα} \left[\frac{1}{e},+\infty\right]}{\Leftrightarrow}$$
$$0<f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e) \Leftrightarrow$$
$$f'\left(\frac{1}{e}\right)<f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

Άρα $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e\ln e+2-0=e+2$

$$\overline{x}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}=$$
$$=\frac{\ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}+e+8+0}{5}=$$
$$=\frac{\ln\left(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}\right)+e+8}{5}=\frac{\ln e^{7}+e+8}{5}=$$
$$=\frac{7+e+8}{5}=\frac{15+e}{5}.$$

**Δ4.**

$$\Omega=\left\{\mathrm{t}_4,\mathrm{n}=1,2,...,30:0<\mathrm{t}_1<\mathrm{t}_2<...<\mathrm{t}_{10}<\frac{1}{\mathrm{e}}<\mathrm{t}_{11}<...<\mathrm{t}_{30}=\right.$$
$$\mathrm{A}=\{\mathrm{t}\in\Omega:(\mathrm{t},\mathrm{f}(\mathrm{t}))\text{οξεία γωνία}\}$$
$$\mathrm{B}=\{\mathrm{t}\in\Omega:\mathrm{f}(\mathrm{t})>\mathrm{f}'(\mathrm{t})+1\}$$

**α.**

Οξεία γωνία άρα $\mathrm{f}'(\mathrm{t})>0$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\ln\mathrm{x}+1.$$
$$\ln\mathrm{t}+1>0\Leftrightarrow\mathrm{t}>\frac{1}{\mathrm{e}}.$$
$$\mathrm{A}=\{\mathrm{t}_{11},\mathrm{t}_{12},...,\mathrm{t}_{30}\}\quad \mathrm{N}(\mathrm{A})=20,\ \mathrm{N}(\Omega)=30$$

$$P(A)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

**β.**

Πρέπει $f(t)>f'(t)+2 \Leftrightarrow$

$t\ln t+2>\ln t+1+1 \Leftrightarrow (t-1)\ln t>0$

Είναι $t_i<1$ i=1,2,...,29 και $t_{30}=1$

Άρα πρέπει $\ln t<0 \Leftrightarrow t<1$

Δηλαδή $B=\{t_1,t_2,...,t_{29}\}$

και $A\cap B=\{t_{11},t_{12},...,t_{29}\}$ με

$N(A\cap B)=19$ και $P(A\cap B)=\frac{19}{30}$.

**Επιμέλεια Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη**