ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.31

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.22

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.86-87

Α4. α) Λ , β) Σ , γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \text{ ή } 8x^2-6x+1=0$

Άρα $x=\dfrac{1}{3}$ **ή** $\Delta=4 \text{ άρα } x_{1,2}=\dfrac{1}{2} \text{ ή } \dfrac{1}{4}$

$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ **άρα** $P(A\cap B)\leqslant P(A)\leqslant P(A\cup B)$

Άρα $P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$, $P(A)=\dfrac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$

B2.

Είναι $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B - A$

Άρα $P(A' - B') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}$$

Άρα $P(A' - B') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ **και**

$$P(\Delta) = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) \quad = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

B3.

$$P(E) = P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$$

$$= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

όπου $A - B, B - A$ **ασυμβίβαστα μεταξύ τους.**

B4. $9x^2 - 3x - 2 = 0 \qquad \Delta = 81 > 0 \qquad X_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{18} = \frac{2}{3}$ **ή** $-\frac{1}{3}$

όμως $0 \leqslant P(\Gamma) \leqslant 1$ **άρα** $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$

Έστω ότι Β, Γ ασυμβίβαστα. Τότε ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος , άρα

$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{2}{3} + \frac{5}{12} = \frac{13}{12} > 1$, αδύνατο αφού $0 \leqslant P(B \cup \Gamma) \leqslant 1$

άρα Β,Γ όχι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $f_1\%=10$ **,** $f_5\%=30$ **,** $f_3\%=30$

διότι $\alpha_3=108^o \Leftrightarrow f_3 \cdot 360^o=108^o \quad \Leftrightarrow f_3\%=30$

$$\bar{x}=14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i=14 \Leftrightarrow \quad 0{,}9+x_2 \cdot f_2+3{,}9+x_4 \cdot f_4+5{,}1=14 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11 \cdot f_2+15 \cdot f_4=4{,}1 \qquad \mathbf{(1)}$$

Από τη σχέση $\sum_{i=1}^{5} f_i=1 \Leftrightarrow f_2+f_4=0{,}3 \Leftrightarrow f_2=0{,}3-f_4$ **(2)**

Άρα από τις σχέσεις (1), (2), προκύπτει $f_4=0{,}2$ **και** $f_2=0{,}1$

Γ2.

κλάσεις	x_i	f_i	$f_i\%$	$x_i-\bar{x}$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \cdot f$
[8,10)	9	0,1	10	-5	25	2,5
[10,12)	11	0,1	10	-3	9	0,9
[12,14)	13	0,3	30	-1	1	0,3
[14,16)	15	0,2	20	1	1	0,2
[16,18)	17	0,3	30	3	9	2,7
Σύνολο	-	1	100	-	-	6,6

$$s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \cdot v_i \;=\; \sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \cdot f_i \quad \Leftrightarrow \quad s^2=6{,}6$$ **άρα** $s=\sqrt{6{,}6}$

άρα $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{6{,}6}}{14} \simeq \frac{2{,}57}{14}>\frac{1{,}4}{14} = \mathbf{0{,}1}$

άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Γ3.

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot v_i = 1780 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot v_i = \frac{1}{v}1780 \quad \Leftrightarrow x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 = \frac{1780}{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8{,}9 = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow v = 200$$

Γ4.

$$\beta_i = \frac{1}{s_\alpha} \cdot \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}$$

Έστω $w_i = \frac{1}{s_\alpha} \cdot \alpha_i$ **από εφαρμογή σχολικού βιβλίου έχουμε :**

$\bar{w} = \frac{1}{s_\alpha} \cdot \bar{\alpha}$ **και** $s_w = \left|\frac{1}{s_\alpha}\right| \cdot s_\alpha = 1, s_\alpha > 0$

Άρα $\beta_i = w_i - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι : $\bar{\beta} = \bar{w} - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha} = \frac{1}{s_\alpha} \cdot \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha} = 0$

και $s_\beta = s_w = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ , έστω** $x = (AB) > 0$ **, y= (ΑΔ)>0**

Από πυθαγόρειο θεώρημα : $x^2 + y^2 = (2\rho)^2 \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10^2 \quad \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2$

$y^2 > 0 \Leftrightarrow 100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10$ **και** $x > 0$ **. Άρα** $0 < x < 10$

και $y = \sqrt{100 - x^2}$

$$f(x) = 2 \cdot (AB\Delta) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{100 - x^2} \quad \Leftrightarrow f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2} \;, \quad 0 < x < 10$$

Δ2. $f'(x)=(x)'\cdot\sqrt{100-x^2}+x\cdot\left(\sqrt{100-x^2}\right)'$ =

= $\sqrt{100-x^2}+\dfrac{x\cdot(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}$ = $\dfrac{\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

Άρα $f'(x)=\dfrac{2\cdot(50-x^2)}{\sqrt{100-x^2}}$ **,** $0<x<10$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Μονοτονία

Για $x\in(0,5\sqrt{2}]$ **f συνεχής , f παραγωγίσιμη για** $x\in(0,5\sqrt{2})$ **και** $f'(x)>0$

για $x\in(0,5\sqrt{2})$ **άρα f γν. αύξουσα για** $x\in(0,5\sqrt{2}]$ **.**

Για $x\in[5\sqrt{2},10)$ **f συνεχής , f παραγωγίσιμη για** $x\in(5\sqrt{2},10)$ **και** $f'(x)<0$

για $x\in(5\sqrt{2},10)$ **άρα f γν. φθίνουσα για .** $x\in[5\sqrt{2},10)$ **.**

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=5\sqrt{2}$ **το** $f(5\sqrt{2})=5\sqrt{2}\cdot\sqrt{100-(5\sqrt{2})^2}$ =

= $5\sqrt{2}\cdot\sqrt{100-50}=50$

και τότε $AB=5\sqrt{2}$

$A\Delta=\sqrt{100-(5\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}$ **, άρα** $AB=A\Delta$ **και ΑΒΓΔ τετράγωνο.**

Δ3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x+1)-\sqrt{99}}{98x}$ = $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x+1)-f(1)}{98x}$ = $\dfrac{1}{98}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x+1)-f(1)}{x}$ =

= $\dfrac{1}{98}\cdot f'(1)=\dfrac{1}{98}\cdot\dfrac{98}{\sqrt{99}}$ =

$\dfrac{\sqrt{99}}{99}$

Δ4. $A-B\subseteq A$ **άρα** $0<P(A-B)\leqslant P(A)\leqslant 1$

f γν. αύξουσα $(0{,}5\sqrt{2}]$ **άρα** $f\left(P(A-B)\right)\leqslant f\left(P(A)\right)$

$P(A-B)\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)}\leqslant P(A)\cdot\sqrt{100-P^2(A)}$ **άρα**

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\leqslant\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\quad \textbf{(1)}$$

αφού $\sqrt{100-P^2(A)}\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)}>0$

Ισχύει $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<1\Leftrightarrow\quad P(A)<\sqrt{100-P^2(A-B)}\quad\Leftrightarrow$

$P^2(A)<100-P^2(A-B)\quad\Leftrightarrow$

$P^2(A)+P^2(A-B)<100$ **, ισχύει αφού**

$0<P(A-B)\leqslant P(A)\leqslant 1$

Άρα για την (1) έχουμε :

$$0<\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\leqslant\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<\frac{1}{\sqrt{99}}<5\sqrt{2}$$

άρα f γν. αύξουσα και $f\left(\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\leqslant f\left(\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$

Επιμέλεια Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη