



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2008

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 ΘΕΩΡΙΑ Σελίδες βιβλίου 235

A.2 Ορισμός Σελίδες βιβλίου 191

B. α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

α) $|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \Leftrightarrow |2\sqrt{2} + i||z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$

β) $|w - (1 - i)| = |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$

θέτουμε: $w = x + yi$

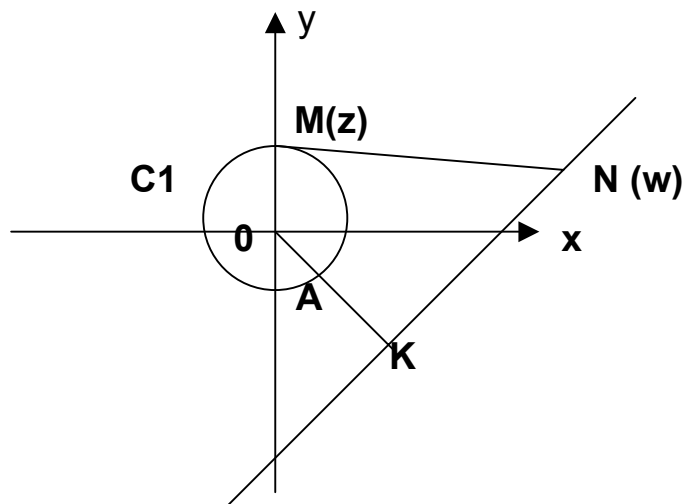
οπότε:

$|(x - 1) + (y + 1)i| = |(x - 3) + (y + 3)i| \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 3)^2} \dots\dots\dots y = x - 4$

4 ευθεία (μεσοκάθετος του ευθ. τμήματος AB με A(1,-1) & B(3,-3).

γ) (ϵ): $y=x-4$ Φέρουμε $OK \perp (\epsilon)$ τότε $\lambda_{OK} \cdot \lambda_{\epsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1$
 άρα $OK: y=-x$ οπότε αν K το σημείο τομής των $y=-x$ και $y=x-4$ $K(2,-2)$,
 άρα $w=2-2i$ με $|w|=2\sqrt{2}$

δ)



$y=x-4$ έστω $M(z)$ και $N(w)$ οι εικόνες των z και w αντίστοιχα, τότε
 $(MN) \geq (AK) \Leftrightarrow |z-w| \geq (AK)$ άρα $|z-w|_{\min} = (AK) = (OK) - \rho = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

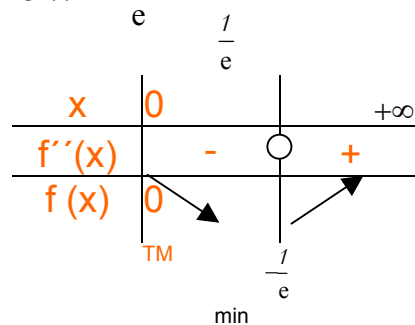
α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ (d L'Hosp)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$f(0) = 0$ άρα f συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\frac{1}{e} \text{ (d L'Hosp)}$$

β) Για $x > 0$: $f'(x) = \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$



Στο $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ η f γν. φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ η f γν. αύξουσα.

Είναι $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty$ άρα $f(A) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

$$\gamma) x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$$

- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$ τότε $f(x) = \alpha$ αδύνατη
- $\alpha = -\frac{1}{e}$ μία ρίζα την $x = \frac{1}{e} > 0$ (Διπλή)
- $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ $f(x) = \alpha$ έχει δύο θετικές ρίζες στα διαστήματα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ και $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ αντίστοιχα.
- $\alpha \geq 0$ μια θετική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

δ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την $f(x)$ στο $[x, x+1]$. Η f συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$: $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x}$ άρα $f'(x) = \ln x + 1$ $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ άρα η f' γνησίως αύξουσα. Οπότε $\xi < x+1 \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$ (λόγω της (1)).

ΘΕΜΑ 4°

α) Έστω $\int_0^2 f(t) dt = c$ οπότε $f(x) = (10x^3 + 3x)c - 45$ άρα $\int_0^2 f(t) dt = c$

$$\int_0^2 [(10t^3 + 3t)c - 45] dt = c$$

$$\left[\frac{10ct^4}{4} + \frac{3ct^2}{2} - 45t \right]_0^2 = c$$

$$40c + 6c - 90 = c$$

$$c = 2$$

$$\text{Άρα } f(x) = (10x^3 + 3x)2 - 45$$

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

$$\beta) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x) \text{ (θέτοντας } u = -h)$$

Υ) i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = \quad (\text{d L'Hosp})$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \right] = \frac{1}{2} \cdot 2g''(x) = g''(x)$$

λόγω (β).

Άρα $g''(x) = f(x) + 45 = 20x^3 + 6x$ οπότε $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c$.

Για $x=0$ $c=1$, αφού $g'(0)=1$

$$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$$

Άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + c_1$

Για $x=0$, $c_1=1$ Αφού $g(0)=1$, τελικά $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii) Η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

Άρα η g γνησίως αύξουσα οπότε η g 1-1 αφού γνησίως μονότονη.

Επιμέλεια Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη