



## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2011

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Θεωρία σελ. 260

**A2.** Θεωρία σελ. 280

**A3.**

α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Σ

#### ΘΕΜΑ Β

**B1.**

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| + |\overline{z - 3i}| = 2$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| + |z - 3i| = 2 \quad (\text{ως γνωστόν } |z| = |\bar{z}|)$$

$$\Leftrightarrow 2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1$$

ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο  $K(0,3)$  και  $\rho = 1$ .

**B2.**

$$\text{Εφόσον } |z - 3i| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\overline{z - 3i}) = 1$$

$$\Leftrightarrow (z - 3i)(\bar{z} + 3i) \Rightarrow \bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$$

**B3.**

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \frac{(\beta_2)}{z - 3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i$$

$$w = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$$

(Από το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $z$  το  $x^2 + (y-3)^2 = 1$  άρα  $(y-3)^2 = 1 - x^2 \geq 0$

άρα  $|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$  άρα  $-2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$ )

**B4.**

$$|z - w| = |z|$$

$$|z - w| = \left| z - (z + \bar{z}) \right| = \left| z - z - \bar{z} \right| = \left| -\bar{z} \right| = |\bar{z}| = |z|$$

(από  $B_3 : w = z + \bar{z}$ )

**ΘΕΜΑ Γ****Γ1.**

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = (xf'(x))'$$

$$\Leftrightarrow (e^x f'(x) - e^x)' = (xf'(x))'$$

$$e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c$$

για  $x = 0$ , έχουμε  $e^0 f'(0) - e^0 - 0 f'(0) + c$

$$c = -1$$

άρα  $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) - 1$

$$\Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε  $h(x) = e^x - x \quad x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = e^x - 1$

|      |              |         |             |
|------|--------------|---------|-------------|
| $x$  | $-\infty$    | $0$     | $+\infty$   |
| $h'$ |              | $\circ$ |             |
| $h$  | γν. φθίνουσα |         | γν. αύξουσα |

$$h(x) \geq h(0) = 1 \text{ άρα } h(x) \geq 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

**Β' Τρόπος**

Η  $g(x) = e^x$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , άρα η  $g$  είναι πάνω από την εφαπτομένη της στο  $A(0,1)$  που είναι  $y = x + 1$  εκτός του σημείου επαφής.)

Επομένως  $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  και το '=' ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

$$\text{Έχουμε λοιπόν } f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln(e^x - x))'$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c, \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{άρα } f(x) = \ln(e^x - x), \forall x \in \mathbb{R}$$

**Γ2.**

$$f(x) = \ln(e^x - x)$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Είναι  $e^x - x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

άρα min για  $x = 0$

$$\text{το } f(0) = 0.$$

|      |              |         |             |
|------|--------------|---------|-------------|
| $x$  | $-\infty$    | $0$     | $+\infty$   |
| $f'$ |              | $\circ$ |             |
| $f$  | γν. φθίνουσα |         | γν. αύξουσα |

**Γ3.**

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{άρα } f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$\text{Θεωρούμε την } R(x) = 2e^x - xe^x - 1, R'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x(1 - x)$$

|      |             |         |              |
|------|-------------|---------|--------------|
| $x$  | $-\infty$   | $1$     | $+\infty$    |
| $R'$ |             | $\circ$ |              |
| $R$  | γν. αύξουσα |         | γν. φθίνουσα |

$$R \text{ συνεχής και } \uparrow \text{ στο } A_1 = (-\infty, 1] \text{ οπότε } R(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} R(x), R(1) \right] = (-1, e - 1]$$

$$R \text{ συνεχής και } \downarrow \text{ στο } A_2 = [1, +\infty) \text{ οπότε } R(A_2) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} R(x), R(1) \right] = (-\infty, e - 1], \text{ αφού}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -1, \text{ καθώς:}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x'}{(e^{-x})'} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0, \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(2 - x) - 1] = (-\infty) - 1 = -\infty, \text{ καθώς:}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$$

- $0 \in R(A_1)$  άρα η  $R(x)$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $A_1 = (-\infty, 1]$ ,  $R \uparrow$  άρα μοναδική.

Έστω  $\rho_1$  η ρίζα στο  $A_1 = (-\infty, 1]$

Για κάθε  $x \in A_1$  με

$$x < \rho_1 \Leftrightarrow R(x) < R(\rho_1) = 0, \text{ άρα } f''(x) < 0$$

$$x > \rho_1 \Leftrightarrow R(x) > R(\rho_1) = 0, \text{ άρα } f''(x) > 0$$

το πρόσημο της  $R(x)$  είναι πρόσημο της  $f''$  αφού  $f''(x) = R(x) \cdot (e^x - x)^{-2}$ , δηλαδή η  $R$  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας  $\rho_1$ , οπότε το  $\rho_1$  είναι θέση σημείου καμπής της  $C_f$ .

- $0 \in R(A_2)$  άρα η  $R(x)$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $A_2 = [1, +\infty)$ ,  $R \downarrow$  άρα μοναδική.

Έστω  $\rho_2$  η ρίζα στο  $A_2 = [1, +\infty)$

Για κάθε  $x \in A_2$  με

$$x < \rho_2 \Leftrightarrow R(x) > R(\rho_2) = 0, \text{ άρα } f''(x) > 0$$

$$x > \rho_2 \Leftrightarrow R(x) < R(\rho_2) = 0, \text{ άρα } f''(x) < 0$$

το πρόσημο της  $R(x)$  είναι πρόσημο της  $f''$ , δηλαδή η  $R$  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας  $\rho_2$ , οπότε το  $\rho_2$  σημείου καμπής της  $C_f$ .

Επομένως η  $f$  έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής.

#### Γ4.

Θεωρούμε την  $\Phi(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$

$\Phi(x)$  συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ως διαφορά συνεχών.

$$\Phi(0) = \ln 1 - \sin 0 = -1$$

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0. \text{ (Εφόσον η } f \text{ από το } \Gamma_1 \text{ έχει ελάχιστο το } 0$$

μόνο για  $x = 0$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , για  $x = \frac{\pi}{2}$  άρα  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ ).

$\Phi(0)\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ , από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση  $\Phi(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Επίσης  $\Phi'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu x > 0$ , γιατί  $\eta\mu x > 0$ ,  $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $e^x - x > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  (από  $\Gamma_1$ )

και  $x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 = 1$ .

Άρα  $\Phi$  γν.αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , άρα η ρίζα μοναδική.

## ΘΕΜΑ Δ

### Δ1.

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt \Leftrightarrow 1-f(x) = e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x) = \int_0^{-x} \frac{e^{2t+2x}}{g(x+t)} dt \Leftrightarrow$$

$$1-f(x) = \int_0^{-x} \frac{e^{2(t+x)}}{g(x+t)} dt$$

θέτουμε

$$\begin{array}{l|l} u = x+t & t=0 \\ du = dt & t=-x \end{array} \quad \begin{array}{l} u=x \\ u=0 \end{array}$$

$$1-f(x) = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du = f(x)$$

- Επειδή η  $g(u)$  συνεχής άρα η  $h(u) = \frac{e^{2u}}{g(u)}$  συνεχής άρα ορίζεται η

$\varphi(x) = \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$  είναι παραγωγίσιμη άρα η  $f$  παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad (2)$$

Ομοίως θέτοντας  $u = x+t$  και με την ίδια διαδικασία

$$\text{προκύπτει: } 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du = g(x)$$

Επειδή η  $f(u)$  συνεχής άρα η  $t(u) = \frac{e^{2u}}{f(u)}$  συνεχής άρα ορίζεται η

$G(x) = \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$  που είναι παραγωγίσιμη άρα η  $g$  παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Από (2) και (3) } e^{2x} = f'(x)g(x) \\ e^{2x} = f(x)g'(x) \end{array} \right\}$$

$$f'(x)g(x) = f(x)g'(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (\ln g(x))'$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x) + c \quad (4)$$

- για  $x=0$  η σχέση  $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$

$$\text{δίνει: } \frac{1-f(0)}{e^0} = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

$$\text{ομοίως } g(0) = 1$$

Άρα η (4) δίνει: για  $x=0$

$$\ln f(0) = \ln g(0) + c \Leftrightarrow \ln 1 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα } \ln f(x) = \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

## Δ2.

Από (3) εφόσον  $f(x) = g(x)$

$$g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow \left( \frac{f^2(x)}{2} \right)' = \left( \frac{1}{2} e^{2x} \right)' \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

για  $x=0$  προκύπτει  $c=0$  άρα  $f^2(x) = e^{2x}$

άρα  $f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$ .

## Δ3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{ue^u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^{-u}}{u}$$

$$u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{u} = x$$

$$= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-u})'}{u'} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-u}}{1} = \lim_{u \rightarrow -\infty} (-e^{-u}) = -\lim_{u \rightarrow -\infty} e^{-u} = -\infty$$

## Δ4.

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt = \int_1^x e^{t^2} dt$$

$$(\text{επειδή } e^{t^2} > 0 \text{ άρα } \int_x^1 e^{t^2} dt > 0 \quad x < 1)$$

$$\Leftrightarrow -\int_1^x e^{t^2} dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^x e^{t^2} dt < 0 \Leftrightarrow F(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$E = \int_0^1 |F(x)| dx = \int_0^1 -F(x) dx$$

$$= -\int_0^1 x'F(x) dx = -\left[ xF(x) \right]_0^1 + \int_0^1 xF'(x) dx$$

$$= -F(1)^0 + 0F(0)^0 + \int_0^1 xe^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} e^u du$$

$$u = x^2$$

$$\begin{array}{l|l} du = 2x dx & x = 0 \quad | \quad u = 0 \\ \frac{1}{2} du = x dx & x = 1 \quad | \quad u = 1 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ e^u \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1) \tau.μ.$$

**Επιμέλεια Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη**