ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 253 (Απόδειξη)

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 191 (Ορισμός)

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 258 (Ορισμός)

Α4. **α)** Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$|z-1|^2+|z+1|^2=4$

$(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow$

$z\overline{z}-z-\overline{z}+1+z\overline{z}+z+\overline{z}+1=4 \Leftrightarrow$

$|z|^2+2+|z|^2=4 \Leftrightarrow$

$2|z|^2=2 \Leftrightarrow$

$|z|^2=1 \Leftrightarrow$

$|z|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με Κ(0,0) ακτίνα ρ=1 και εξίσωση $x^2+y^2=1$

Β2.
α΄ τρόπος

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$|z_1 - z_2|^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow$$
$$(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 2 \Leftrightarrow$$
$$z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 2 \Leftrightarrow$$
$$|z_1|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) + |z_2|^2 = 2$$

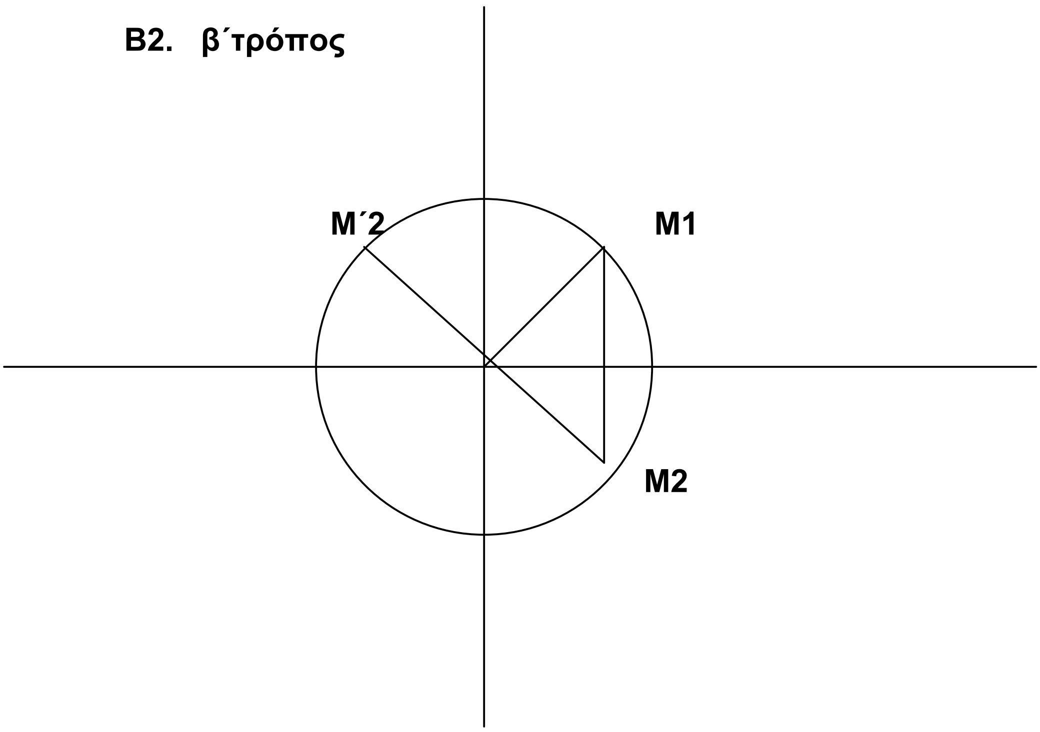
Από Β1 έχω $|z_1| = |z_2| = 1$
Άρα η τελευταία σχέση γίνεται:

$$1 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) + 1 = 2 \Leftrightarrow$$
$$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0 \; (1)$$

Οπότε έχουμε

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$
$$|z_1 + z_2|^2 = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2}$$
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 \; \alpha\pi\acute{o}(1)$$
$$|z_1 + z_2|^2 = 1 + 1 = 2 \; \acute{A}\rho\alpha \, |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

B2. β΄τρόπος



Οι εικόνες των z_1, z_2 ας είναι M_1, M_2 αντίστοιχα, είναι σημεία του κύκλου

$$OM_1 = |z_1| = 1$$

$$\kappa\alpha\iota$$

$$OM_2 = |z_2| = 1$$

Εφόσον

$$OM_1{}^2 + OM_2{}^2 = M_1M_2{}^2 \Rightarrow$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Rightarrow$$

$$2 = |z_1 - z_2|^2$$

Άρα το OM_1M_2 είναι ορθογώνιο στο Ο. Η απόσταση που ζήταμε είναι $|z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)|$

Δηλαδή M_1M_2' όπου M_2' η εικόνα η συμμετρική του M_2 ως προς την αρχή των αξόνων.

Άρα η $M_1\hat{O}M_2' = 90^0$, άρα το τρίγωνο OM_1M_2' είναι ορθογώνιο στο Ο,

$\alpha\phi o\acute{\upsilon}\ \ OM_1^{\ 2} + OM'_2{}^2 = M_1M'_2{}^2 \Leftrightarrow$

$1+1 = |z_1+z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1+z_2| = \sqrt{2}$

Β3.

Έχουμε:

$\left|w - 5\overline{w}\right| = 12\ \acute{o}\pi o\upsilon$

$w = x + y_i\ \ \overline{w} = x - y_i$

Άρα:

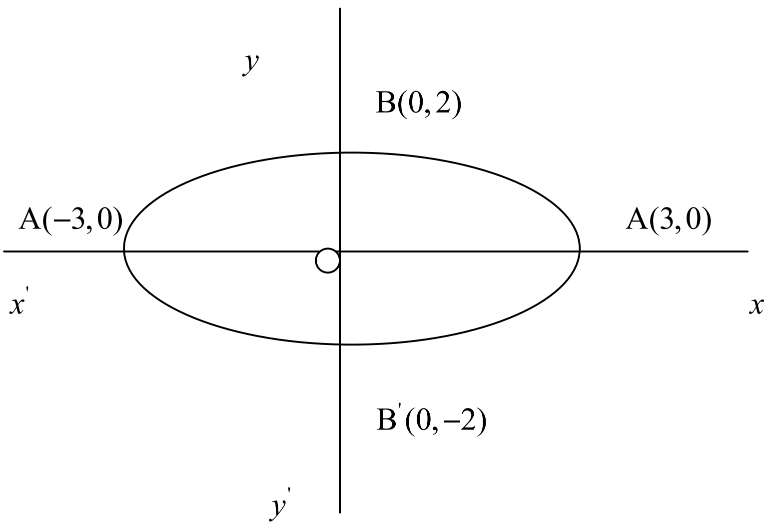
$|x + yi + 1 - 5(x - yi)| = 12 \Leftrightarrow$

$|x + yi - 5x + 5yi| = 12 \Leftrightarrow$

$|-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow$

$\sqrt{16x^2 + 36y^2} = 12 \Leftrightarrow$

$16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$



$$|W|_{\max} = (OA) = (OA') = 3$$

$$|W|_{\min} = (OB) = (OB') = 2$$

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

Β4.
Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$|z-w| \leq |z| + |w|_{\max} = 1+3 = 4 \ (1)$$

$$||z|-|w|| \leq |z-w|$$

Όμως
$$|z| = 1 \ \kappa\alpha\iota \ |w|_{\min} = 2$$

Άρα

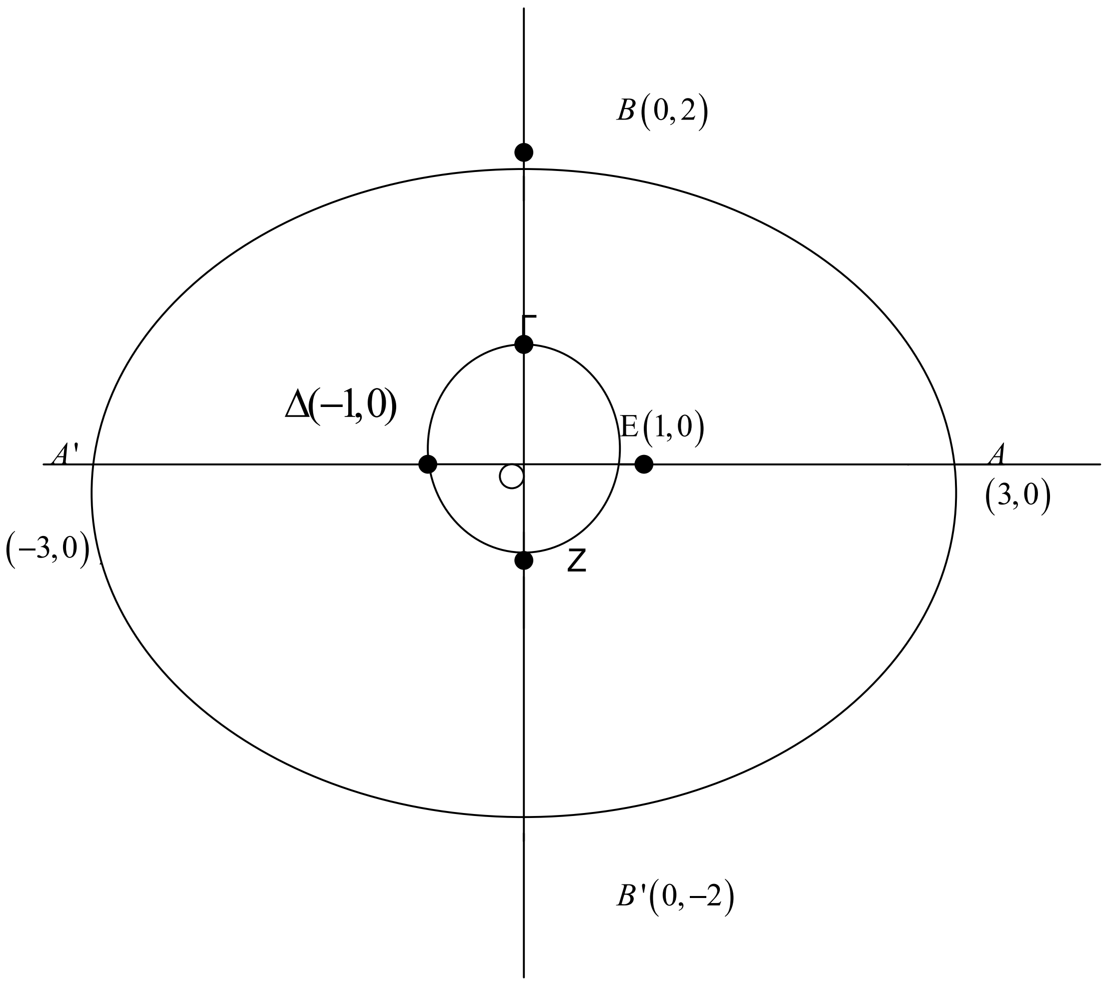
$$||z|-|w|| \leq |z-w|$$

Έχουμε: $$|z-w| \geq |1-2| = |-1|$$
$$|z-w| \geq 1 \ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $1 \leq |z-w| \leq 4$

B4

β΄ Τρόπος



Max$|z-w|=$ ΔΑ=1+3=4 (ΟΑ=3 , ΟΔ=1)

Min$|z-w|=$ΒΓ=2-1=1 (ΟΒ=2, ΟΓ=1)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

$f(x)=(x-1)\ln x-1 \quad , \ x>0$

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x} \quad , \ x>0$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-x+1}{x^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0 \quad , \ x>0$

	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

$f'(1)=0$

$0<x<1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1) \Leftrightarrow f'(x)<0$

$x>1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1) \Leftrightarrow f'(x)>0$

$f(1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-1\right]=(-1)(-\infty)-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Στο $\Delta_1=(0,1]$, η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα $f\left((0,1]\right)=[-1,+\infty)$

Στο $\Delta_2=[1,+\infty)$, η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $f\left([1,+\infty)\right)=[-1,+\infty)$

Άρα το Σύνολο Τιμών της f είναι $f\left((0,+\infty)\right)=[-1,=\infty)$.

Γ2

$$x^{x-1}=e^{2013}\Leftrightarrow$$
$$\ln x^{x-1}=\ln e^{2013}\Leftrightarrow$$
$$(x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow$$
$$(x-1)\ln x=2012+1\Leftrightarrow$$
$$(x-1)\ln x-1=2012\Leftrightarrow$$
$$f(x)=2012 \quad (1)$$

$$f(\Delta_1)=[-1,+\infty)$$
$$f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$$

- $2012\in f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον λύση (ρίζα) x_1 στο Δ_1 και $f(1)=-1$, άρα $x_1\in(0,1)$,καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα η ρίζα x_1 είναι μοναδική.
- $2012\in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2 στο Δ_2 και $f(1)=-1$, άρα $x_2\in(1,+\infty)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα x_2 είναι μοναδική. Άρα η f έχει δύο θετικές ρίζες.

Γ3

Θεωρώντας
$h(x)=e^x f(x)-2012e^x, x\in[x_1,x_2]$
h συνεχείς στο $[x_1,x_2]$.
h παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2)
$h'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)-2012e^x$.
$h(x_1)=0$
$h(x_2)=0$

$(h(x_1)=e^{x_1} f(x_1)-e^{x_1}2012=e^{x_1}(f(x_1)-2012)$, από το Γ2 ερώτημα το x_1 είναι λύση της εξίσωσης (1), άρα $f(x_1)=2012$).
Ομοίως αποδεικνύεται, ότι $f(x_2)=2012$, άρα και $h(x_2)=0$.
Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h'(xo)=0$
$\Leftrightarrow e^{xo} f(xo)+e^{xo} f'(xo)-2012e^{xo}=0 \ (e^{xo}>0)$
$\Leftrightarrow f(xo)+f'(xo)=2012$.

Γ4

$g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x-1+1, x>0$

$g((o,+\infty))=[o,+\infty)$

$g(x)\geq 0, x>0$ επειδή $f(x)\geq -1 \Leftrightarrow f(x)+1\geq 0$

$$E=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\ln dx=$$

$$\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln dx=$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx=$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)-\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=$$

$$\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\ln e-0-\left(\frac{e^2}{4}-e-\frac{1}{4}+1\right)=$$

$$\frac{e^2}{2}-e-\left(\frac{e^2-1}{4}-e+1\right)=$$

$$\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-1=$$

$$\frac{2e^2-e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)\neq 0 \quad x>0 \quad \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$

$\ln x - x = -(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e) \quad |f(x)|$

Δ1.

Από τη σχέση $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e} \Rightarrow \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e} \geq 0$

θεωρούμε την $R(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e}$

η f(t) συνεχής $\forall\, t>0$ άρα ορίζεται $\Phi(x)=\int_1^x f(t)dt,\ x>0$ που είναι παραγωγίσιμη. Άρα παραγωγίσιμη είναι και η $\Phi(x^2-x+1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\forall\, x\in\mathbb{R}$

Επίσης η $h(x)=\frac{x-x^2}{e}$ είναι παραγωγίσιμη άρα η R(x) παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων με $R'(x)=f(x^2-x+1)(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$

άρα R(x) είναι παραγωγίσιμη και στη θέση $x_0=0$ όπου παρουσιάζει ελάχιστο αφού
$R(x)\geq 0 = R(0)$.

Σημείωση: εφόσον η f(t) ορίζεται $\forall\, t>0$ και $1\in(0,+\infty)$ άρα πρέπει και $x^2-x+1>0$, που ισχύει $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Άρα η R(x) ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Από Θεώρημα Fermat λοιπόν

$R'(0)=0 \Rightarrow -f(1)-\frac{1}{e}=0 \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad f(1)=-\frac{1}{e}$ εφόσον η f(x) $\neq 0$ και συνεχής διατηρεί πρόσημο και καθώς $f(1)=-\frac{1}{e}\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ f(x)<0\ \forall x>0$, Από τη σχέση $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\left|f(x) \quad εφόσον\ f(x)<0\right|$

άρα $\ln x - x = (\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e)f(x) \ \ (1)$

$εφόσον\ \ln x \le x-1\ (γνωστη\ σχεση)\ και\ x-1<x\ άρα\ \ln x - x < 0$

άρα από (1) $\dfrac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e} = f(x)$.

$$η\ g(t) = \frac{\ln t - t}{f(t)}\ είναι\ συνεχεις\ \forall\ t>0$$

$$άρα\ ορίζεται\ η\ t(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e \quad που\ είναι\ παραγωγίσιμη$$

Άρα η f(x) είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων. Από τη σχέση:

$$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} + e$$

Με παραγωγίσιμη:

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)} \quad \text{Από εφαρμογή σχ. βιβλίου}\ (f' = f \Leftrightarrow f = ce^x)$$

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = ce^x,\ c\in R\ με\ f(1) = -\frac{1}{e}, \quad άρα\ c=1$$

$$άρα\ \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x), \quad x>0$$

Δ2.

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x}(\ln x - x)$$

$$\left\{ \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+}(\ln x - x) = -\infty \right\}$$

Άρα $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Για το ζητούμενο όριο:

$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$ θέτουμε $u = f(x)$

Άρα το όριο γίνεται:

$\lim_{u\to -\infty}\left(u^2 \eta\mu\frac{1}{u} - u\right)$ θέτουμε $\frac{1}{u} = t$

και το όριο γίνεται:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\eta\mu t}{t^2} - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\eta\mu t - t}{t^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\eta\mu t - t)'}{(t^2)'} = \lim_{t\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu t - 1}{2t} =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu t - 1}{t} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Δ3

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\quad x > 0$

η $f(t)$ είναι συνεχής άρα ορίζεται

η $F(x)$ που είναι παραγωγίσιμη με

$F'(x) = f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ έτσι

$$F''(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) =$$

$$e^{-x}\left(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} + x - 1 - \ln x\right) > 0$$

αφού $\left\{ \ln x \le x-1 \Leftrightarrow x-1-\ln x \ge 0 \right.$ και $\frac{1}{x} > 0$ για κάθε $\left. x > o \right\}$

άρα F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Θ.Μ.Τ. στο [x, 2x] και [2x,3x] η F συνεχείς στα [x,2x] και [2x,3x] και παραγωγίσιμη με F'(x)=f(x)<0 άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x,2x)$ και $\xi_2 \in (2x,3x)$ ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{x}$$

$$F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

$$\mu\varepsilon\ x>0$$

$$\acute{o}\mu\omega\varsigma\ \xi_1<\xi_2 \Leftrightarrow F'(\xi_1)<F'(\xi_2), \quad (F''(x)>0, \acute{\alpha}\rho\alpha\ F' \uparrow)$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ \ \frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

Δηλαδή (αφού x>0)
F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x) $\Leftrightarrow$ 2F(2x)<F(3x)+F(x)

Δ4.
Ζητάμε ρίζα για την εξίσωση 2F(x)=F(3β)+F(β).
Θωρούμε R(x)=2F(x)-F(3β)-F(β) η R συνεχής στο [β,2β]
R(β)=2F(β)-F(3Β)-F(β)=F(β)-F(3β)>0
(αφού F'(x)=f(x)<0 άρα F $\downarrow$ καθώς β<3β (β>0), οπότε F(β)>F(3β)
R(2β)=2F(2β)-F(3β)-F(β)<0 (από Δ_3 για x=β)
F(β)+F(3Β)>2F(2β) άρα από ΘΒ υπάρχει μια τουλάχιστον ξ $\in$ (β, 2β):
R(ξ)=0.
Επίσης R(x)=2F'(x)=2f(x)<0 άρα R $\downarrow$ άρα το ξ μοναδικό.