

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΔΕΥΤΕΡΑ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 253

A2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 141

A3. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z + 4| = 2|z + 1|$

$$|z + 4|^2 = 4|z + 1|^2$$

$$(z + 4)(\bar{z} + 4) = 4(z + 1)(\bar{z} + 1)$$

$$z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} + 16 = 4(z\bar{z} + z + \bar{z} + 1)$$

$$z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} + 4$$

$$3z\bar{z} = 12$$

$$z\bar{z} = 4$$

$$|z|^2 = 4$$

$$|z| = 2$$

Κύκλος με κέντρο το $0(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

B2. Αφού ο z_1 είναι πραγματικός με $\text{Re}(z_1) > 0$ θα είναι της μορφής $z_1 = x$ και $x > 0$ ενώ ο $z_2 = y_i$ με $y < 0$

Επειδή οι z_1, z_2 ανήκουν στο κύκλο του ερωτήματος B1) θα ισχύει: $|z_1| = 2 \Leftrightarrow$

$$|x| = 2 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 2 \text{ και } |z_2| = 2 \Leftrightarrow |y_i| = 2 \Leftrightarrow |y| = 2 \stackrel{y<0}{\Leftrightarrow} y = -2$$

Συνεπώς, $z_1 = 2$ και $z_2 = -2i$

$$\begin{aligned} \text{B3. } (z_1 - z_2)^{20} - (z_1 + z_2)^{20} &= (2 + 2i)^{20} - (2 - 2i)^{20} = 2^{20}[(1 + i)^2]^{10} - \\ &2^{20}[(1 - i)^2]^{10} = 2^{20}(1 + 2i + i^2)^{10} - 2^{20}(1 - 2i + i^2)^{10} = 2^{20}(2i)^{10} - \\ &2^{20}(-2i)^{10} = 2^{20}(2i)^{10} - 2^{20}(2i)^{10} = 0 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $D_f = (0, +\infty)$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty$

Άρα η $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{(\infty)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Άρα η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη

Γ2. Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x) = \frac{x(\ln x)' - (x) \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \stackrel{(\nearrow)}{\Leftrightarrow} 0 < x < e$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \stackrel{(\nearrow)}{\Leftrightarrow} x > e$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	/	+	-
$f(x)$	/	γνησίως αύξουσα	γνησίως φθίνουσα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(e, +\infty)$ για $x = e$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο με τιμή $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$.

Επειδή για $x = e$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο θα ισχύει:

$$f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} e \cdot \frac{\ln x}{x} \leq 1 \Leftrightarrow e \cdot f(x) \leq 1.$$

Γ3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Οπότε το εμβαδόν θα υπολογιστεί στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Θα αναζητήσουμε το πρόσημο της f στο διάστημα αυτό. $\frac{1}{e} \leq x \leq 1 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \leq 0$. Άρα, $E = \int_{1/e}^1 |f(x)| dx = - \int_{1/e}^1 f(x) dx = - \int_{1/e}^1 \frac{\ln x}{x} dx = - \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_{1/e}^1 = - \frac{1}{2} \left(\ln^2 1 - \ln^2 \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln e)^2 = \frac{1}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Οι f, f' είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων στο \mathbb{R} με:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2, x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 > 0$$

Άρα, η f κυρτή στο \mathbb{R}

Έστω ότι υπάρχουν 3 ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

- Η f παραγωγίσιμη στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$
- $f_{(\rho_1)} = f_{(\rho_2)} = f_{(\rho_3)} = 0$

Άρα, σύμφωνα με Θ. Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$$

- Η f' παραγωγίσιμη στο $[\xi_1, \xi_2]$
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Άρα, σύμφωνα με Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$,

άτοπο αφού $f''(\xi) > 0$. Συνεπώς, υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες με $f(0) = f(1) = 0$.

Δ2.

- Η f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$
- $f(0) = f(1) = 0$

Από Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Επειδή $f''(x) > 0$, η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1. Οπότε, το x_0 είναι μοναδική ρίζα.

Δ3. Η f διατηρεί πρόσημο στο $[0, 1]$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1/2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{4} - 1 = \sqrt{2} - \frac{3}{4} < 0$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -f(x) > 0 \Leftrightarrow \int_x^1 -f(t) dt > 0 \Leftrightarrow -\int_x^1 f(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt > 0 > x - 1$$

Άρα, $\int_1^x f(t) dt - (x - 1) > 0$ εκτός από την τιμή 1

Άρα, το $x_0 = 1$ μοναδική ρίζα.

Επιμέλεια Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη

Φροντιστήρια ΒΑΚΑΛΗ