



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ 2009

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. α. Θεωρία σελ. 229 σχολικού βιβλίου
β. Ορισμός σελ. 279 σχολικού βιβλίου

- B. 1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ.

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Είναι $z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} - \frac{i^2-3i}{2} = \frac{1-i}{2} - \frac{-1-3i}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$

Άρα $\bar{z} = -(1-i) = -1+i$, $z^2 = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ και

$$z^3 = z^2 \cdot z = 2i(1+i) = 2i-2 = -2+2i$$

β. Είναι $(AB) = |-\bar{z} - z^2| = |-1+i-2i| = |-1-i| = \sqrt{2}$

$$(B\Gamma) = |z^2 - z^3| = |2i+2-2i| = 2$$

$$(A\Gamma) = |-\bar{z} - z^3| = |-1+i+2-2i| = |1-i| = \sqrt{2}$$

Είναι $(AB) = (A\Gamma)$ άρα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

γ. Είναι $|z^2 + \bar{z}|^2 = 2, |z^3 + \bar{z}|^2 = 2, |z^3 - z^2|^2 = 4$ άρα $|z^2 + \bar{z}|^2 + |z^3 + \bar{z}|^2 = 2+2=4 = |z^3 - z^2|^2$.

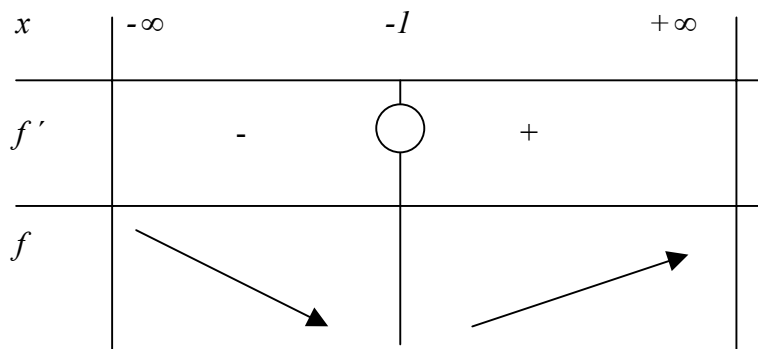
ΘΕΜΑ 3^ο

α. Είναι $f'(x) = e^{x-a} + xe^{x-a}$. Για $x=0$: $f'(0) = e^{-a}$. Είναι $\lambda_e = e$

Πρέπει $f'(0) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -1$.

β. i Είναι $f(x) = xe^{x+1}, x \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(x) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (1+x)e^{x+1}$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ αφού $e^{x+1} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Είναι η f συνεχής στο $(-\infty, -1]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$. Είναι η f συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -1$ το $f(-1) = -1$.

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = 0$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{x+1}) \stackrel{(-\infty) \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x-1}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x-1})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x-1}} = 0$$

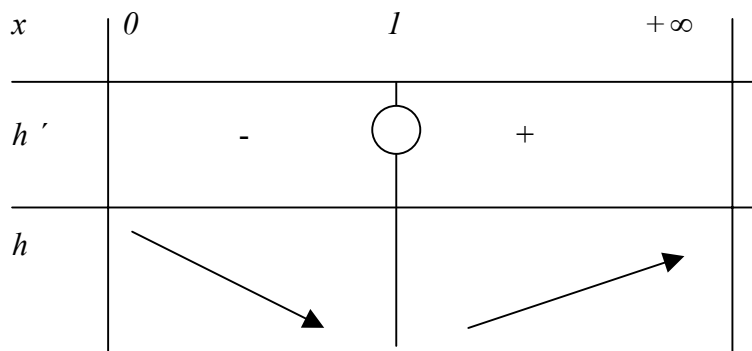
άρα ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Είναι $h(x) = f(x) - g(x) = x - 1 - \ln x, x > 0$

$$\text{Είναι } h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

$$\text{Είναι } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



οπότε η h παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ το $h(1) = 0$. Άρα
 $h(x) \geq h(1) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

β. i. Είναι η h συνεχής στο $[1, e]$ και $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, e)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, δηλαδή για $1 \leq x \leq e$ θα είναι $h(1) \leq h(x) \leq h(e) \Leftrightarrow 0 \leq h(x) \leq e - 2$.

ii. Είναι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$ οπότε

$$E = \int_1^e h(x) dx = \int_1^e (x - 1 - \ln x) dx = \int_1^e x dx - \int_1^e dx - \int_1^e \ln x dx \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x') \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' dx$$

$$= [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = e \ln e - \ln 1 - e + 1 = 1.$$

$$\text{Άρα } (1) \Leftrightarrow E = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e - [x]_1^e - 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 - 1 = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

iii. Είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e e^{h(x)} [h(x) + 1] \cdot h'(x) dx = \int_1^e \left(e^{h(x)} \right)' [h(x) + 1] dx = \left[e^{h(x)} (h(x) + 1) \right]_1^e - \int_1^e e^{h(x)} (h(x) + 1)' dx = \\ &= \left[e^{h(x)} (h(x) + 1) \right]_1^e - \int_1^e e^{h(x)} \cdot h'(x) dx = \\ &= \left[e^{h(x)} (h(x) + 1) \right]_1^e - \left[e^{h(x)} \right]_1^e = e^{h(e)} (h(e) + 1) - e^{h(1)} (h(1) + 1) - e^{h(e)} + e^{h(1)} = \\ &= e^{e-2} (e - 2 + 1) - e^0 - e^{e-2} + e^0 = e^{e-2} (e + 1) - e^{e-2} = e^{e-2} \cdot e = e^{e-1}. \end{aligned}$$