

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ
ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 191

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 251

A3. α) Σ , β) Λ , γ) Λ , δ) Σ , ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η Εξίσωση $3x^2 + \alpha x + 3 = 0$ έχει διακρίνουσα : $\Delta = \alpha^2 - 36 < 0$ αφού : $-6 < \alpha < 6$
άρα η εξίσωση έχει δυο ρίζες μιγαδικές και συζυγείς. Έτσι από τύπους Vieta έχω :

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{3}{3} \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

(* αφού z είναι η μια ρίζα της εξίσωσης τότε η άλλη θα είναι $\bar{z}$)

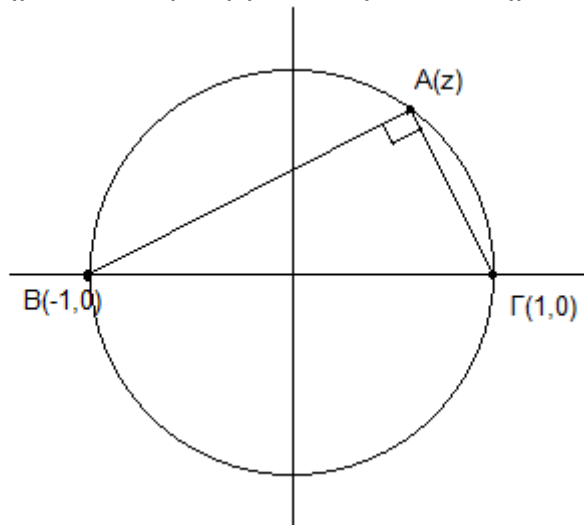
B2. Έχω : $|z-1|^2 + |z+1|^2 = (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 =$
 $= 2z\bar{z} + 2 = 2|z|^2 + 2 = 4$

Έστω $A(z)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(1,0)$ τότε $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow (A\Gamma)^2 + (AB)^2 = 4$

Παρατηρώ ότι $(B\Gamma) = \sqrt{(1+1)^2 + (0-0)^2} = 2$ άρα $(B\Gamma)^2 = 4$ οπότε :

$(A\Gamma)^2 + (AB)^2 = (B\Gamma)^2$. Δηλ. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A (αφού ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα).

Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού το Α είναι σημείο του μοναδιαίου κύκλου ($|z|=1$), και τα Β, Γ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του, άρα η γωνία Α βαίνει σε ημικύκλιο άρα είναι ορθή.



B3. Από τύπους Vieta έχω :

$$z_1 + z_2 = -\frac{\alpha}{3} \Leftrightarrow z + \bar{z} = -\frac{\alpha}{3} \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z) = -\frac{\alpha}{3} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{3} \Leftrightarrow \alpha = -3.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $A_f = (0, +\infty)$

- Κατακόρυφες : Ψάχνω στο $x_0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) = -\infty$ καθώς

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Άρα αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, η ευθεία $(\varepsilon): x = 0$ (ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Οριζόντιες : Ψάχνω στο $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$ καθώς $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Γ2. Θα εφαρμόσουμε Θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα $[1, e]$

- Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
 $f(1) = -1 < 0$
- $f(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

Άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η $f \uparrow (0, +\infty)$, οπότε έχει το πολύ μια ρίζα. Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1, e)$.

Γ3. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες

$$x = e, \quad x = 2e \text{ είναι : } E(\Omega) = \int_e^{2e} |f(x)| dx$$

Ισχύει : $e \leq x \leq 2e \Rightarrow f(e) \leq f(x) \leq f(2e)$ όμως :

$$f(e) = \frac{e-1}{e} > 0 \text{ άρα : } f(x) \geq f(e) > 0. \text{ Έτσι έχουμε :}$$

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_e^{2e} f(x) dx = \int_e^{2e} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) dx = \int_e^{2e} (x)' \cdot \ln x dx - \int_e^{2e} \frac{1}{x} dx = \\ &= [x \ln x]_e^{2e} - \int_e^{2e} x(\ln x)' dx - [\ln x]_e^{2e} = 2e \ln 2e - e \ln e - \int_e^{2e} 1 dx - (\ln 2e - \ln e) = \\ &= 2e(\ln 2 + \ln e) - e - [x]_e^{2e} - \ln 2 = 2e \ln 2 + 2e - 2e - \ln 2 = (2e - 1) \ln 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\begin{aligned} \Delta 1. \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε : } f'(x) &= 2xe^{-x} - f(x) \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = 2xe^{-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = 2x \Leftrightarrow (f(x) \cdot e^x)' = (x^2)' \end{aligned}$$

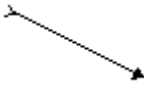
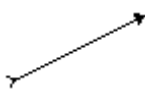
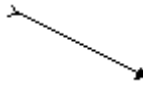
Άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε : $f(x) \cdot e^x = x^2 + c$ (1) με $x \in \mathbb{R}$.

Για $x=1$ η (1) γίνεται : $f(1) \cdot e = 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$.

$$\text{Επομένως : } f(x) \cdot e^x = x^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta 2. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f					

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

➤ Στο $A_1 = (-\infty, 0]$ η $f \downarrow$ και συνεχής, άρα : $f(A_1) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} \cdot x^2 \right) = +\infty \text{ και } f(0) = 0, \text{ άρα : } f(A_1) = [0, +\infty)$$

➤ Στο $A_2 = [0, 2]$ η $f \uparrow$ και συνεχής, άρα : $f(A_2) = [f(0), f(2)] = \left[0, \frac{4}{e^2} \right]$

➤ Στο $A_3 = [2, +\infty)$ η $f \downarrow$ και συνεχής, άρα : $f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(2) \right]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \text{ άρα : } f(A_3) = \left(0, \frac{4}{e^2} \right]$$

$$\text{Τελικά : } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [0, +\infty).$$

Δ3. Έχουμε την εξίσωση : $x^2 = 2e^{x-2} \Leftrightarrow x^2 = 2 \frac{e^x}{e^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^x} = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{e^2}$

- $\frac{2}{e^2} \in f(A_1) = [0, +\infty)$ και $f \downarrow A_1$, άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{2}{e^2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_1 = (-\infty, 0]$.
- $\frac{2}{e^2} \in f(A_2) = \left[0, \frac{4}{e^2} \right]$ και $f \uparrow A_2$, άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{2}{e^2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_2 = [0, 2]$.
- $\frac{2}{e^2} \in f(A_3) = \left(0, \frac{4}{e^2} \right]$ και $f \downarrow A_3$, άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{2}{e^2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_3 = [2, +\infty)$.

Τελικά η εξίσωση : $x^2 = 2e^{x-2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{e^2}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $M(-1, f(-1))$, τότε :

$$(\varepsilon): y - f(-1) = f'(-1)(x + 1), \text{ όμως : } f(-1) = e \text{ και } f'(-1) = -3e$$

Άρα : $(\varepsilon): y - e = -3e(x + 1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = -3ex - 2e$. Όμως η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής M .

Επομένως για κάθε $x \leq 0$ είναι :

$$f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq -3ex - 2e \Leftrightarrow f(x) + 3ex + 2e \geq 0, \quad x \leq 0$$