



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ 2010

ΘΕΜΑ Α

A1 Θεωρία σελ. 232 Σχολικού βιβλίου

A2 Ορισμός σελ 188 Σχολικού βιβλίου

A3 α-Σ

β-Σ

γ-Σ

δ-Λ

ε-Λ

ΘΕΜΑ Β

B1.

Είναι $|z| = |z - 2i| \Leftrightarrow |z - (0 + 0i)| = |z - (0 + 2i)|$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα $A(0,0)$ και $B(0,2)$

Έστω

$$z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} |z| = |z - 2i| &\Leftrightarrow |x + yi| = |x + yi - 2i| \Leftrightarrow |x + yi| = |x + (y - 2)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow 4y = 4 \Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

B2.

Είναι $z = x + i, x \in \mathbb{R}$

Πρέπει $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$

Άρα $z = 1 + i \text{ ή } z = -1 + i$.

B3.

Είναι

$$\begin{aligned} z_1^4 + z_2^4 &= (1+i)^4 + (-1+i)^4 = \left[(1+i)^2\right]^2 + \left[(-1+i)^2\right]^2 = (1+2i+i^2)^2 + (1-2i+i^2)^2 = (2i)^2 + (-2i)^2 = \\ &= 4i^2 + 4i^2 = -4 - 4 = -8. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x}$ και $f''(x) = 6x + \frac{3}{x^2} > 0$ αφού $x > 0$. Είναι η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Γ2.

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty \text{ θα είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ δηλαδή ο $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Γ3.

$$\text{Είναι } f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 = 0$$

$$\text{Θέτουμε } g(x) = f(x) - 2 = x^3 - 3 \ln x - 2$$

$$\text{δηλαδή } g(x) = x^3 - 3 \ln x - 2 \text{ με } x \in [1, e]$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ } g \text{ συνεχής ως άθροισμα συνεχών} \\ \bullet \text{ } g(1) = 1 - 3 \ln 1 - 2 = -1 < 0 \\ g(e) = e^3 - 3 \ln e - 2 = e^3 - 5 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(1)g(e) < 0 \Rightarrow$$

$$\text{Bolzano} \Rightarrow \text{υπάρχει } x_0 \in (1, e) : g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) = 2 \text{ με } x_0 \in (1, e).$$

Είναι $g'(x) = f'(x)$. Είναι η f κυρτή στο $(0, +\infty)$, άρα θα είναι κυρτή και στο $[1, e]$, οπότε $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$. Είναι η g συνεχής στο $[1, e]$ και

$g'(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, άρα η $g(x) = 0$ θα έχει μια το πολύ πραγματική ρίζα στο $[1, e]$. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ ή $f(x) = 2$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο $[1, e]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Είναι $g(x) = e^x (f(x) - x + 1), x \in \mathbb{R}$. Είναι η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = e^x (f(x) - x + 1) + e^x \cdot (f'(x) - 1) =$$

$$e^x (f(x) - x + 1 + f'(x) - 1) = e^x (f(x) - x - f(x) + x) = e^x \cdot 0 = 0$$

Άρα $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Δ2.

Η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Για $x = 0$: $g(0) = e^0 (f(0) - 0 + 1)$ οπότε $g(0) = 1$

Αφού g σταθερή στο $\mathbb{R}$ και $g(0) = 1$ ισχύει $g(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε:

$$g(x) = e^x (f(x) - x + 1) \stackrel{g(x)=1}{\Leftrightarrow} 1 = e^x (f(x) - x + 1) \Leftrightarrow f(x) - x + 1 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} + x - 1, x \in \mathbb{R}$$

Δ3.

$$f(x) = e^{-x} + x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x}$

$$\text{Είναι } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x} > 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \stackrel{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f		$\searrow$	$\nearrow$

ελαχ.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για

$x = 0$ το $f(0) = e^0 + 0 - 1 = 0$ δηλαδή

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ4.

Είναι $f(0) = 0$, οπότε η $f(x) = 0$ έχει προφανή ρίζα τη $x = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, η $f(x) = 0$ θα έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, 0]$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, η $f(x) = 0$ θα έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$. Άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$.

Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

Οπότε
$$E = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^{-x} + x - 1) dx = \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = -e^{-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

Τ.μ.

Επιμέλεια Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη