



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ 2012

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 224

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

A3.

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. 1^{ος} τρόπος

$$|iz - 1| = 1 \Leftrightarrow \left| i \overset{z=x+yi}{(x+yi)} - 1 \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$|-y-1+xi| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(-y-1)^2 + x^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(-y-1)^2 + x^2}^2 = 1^2 \Leftrightarrow (-y-1)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$x^2 + (y+1)^2 = 1$, άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K(0, -1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

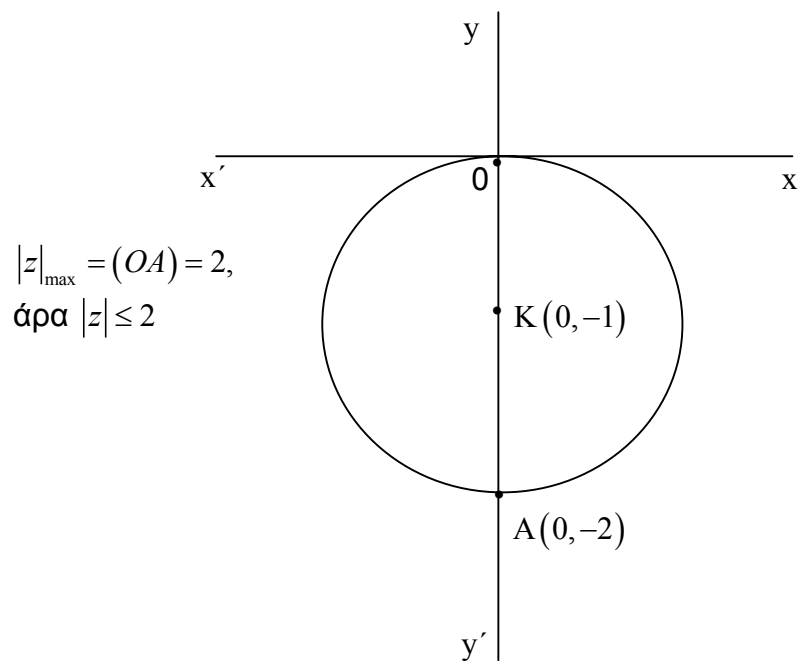
2^{ος} τρόπος

$$|iz - 1| = 1 \Leftrightarrow |iz + i^2| = 1 \Leftrightarrow |i(z+i)| = 1 \Leftrightarrow$$

$$|i| \cdot |z+i| = 1 \Leftrightarrow |z+i| = 1, \text{ άρα ο γ.τ. των εικόνων του } z \text{ είναι κύκλος με κέντρο}$$

$K(0, -1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

B2.

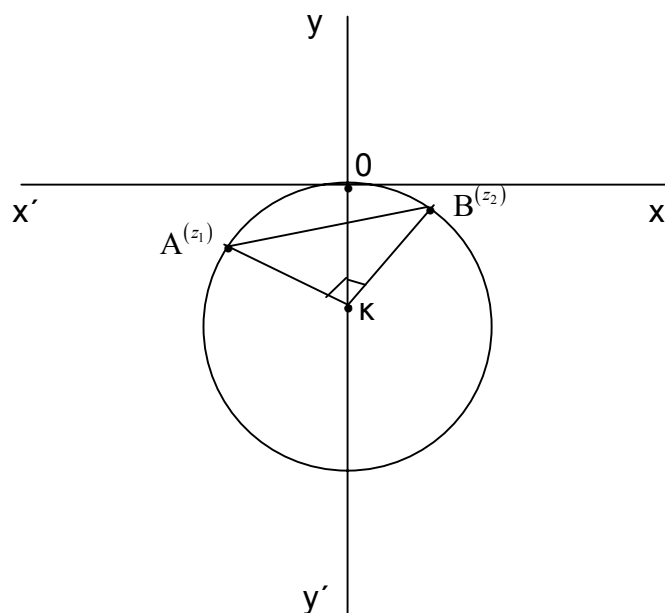


B3.

$$(AB)^2 = |z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(KA)^2 + (KB)^2 = \rho^2 + \rho^2 = 1 + 1 = 2$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι
το τρίγωνο $\triangle K \hat{A} B$ είναι ορθογώνιο στο Κ.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f'(x) = (e^{2x} - 2x)' = 2 \cdot e^{2x} - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = 2 \Leftrightarrow e^{2x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, την τιμή $f(0) = 1$

Γ2.

$$f''(x) = (2e^{2x} - 2)' = 4e^{2x} > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι κυρτή.}$$

Γ3.

Προφανής ρίζα το 0, αφού $f(0) = 1$

$$\text{για } x < 0 \xrightarrow{f \downarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$$

$$\text{για } x > 0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

Γ4.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι η $y = 1$.

Η f είναι κυρτή.

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2x - 1 \geq 0$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 [f(x) - 1] dx = \int_0^1 [e^{2x} - 2x - 1] dx =$$

$$= \left[\frac{e^{2x}}{2} - x^2 - x \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - 2 - \frac{1}{2}$$

άρα $E = \frac{e^2 - 5}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = \frac{f(x) - 2}{x - 2}$

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = 2$

Είναι $f(x) = (x - 2) \cdot \varphi(x) + 2$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(2) &\stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [(x - 2)\varphi(x) + 2] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} [(x - 2)\varphi(x)] + 2 = 0 \cdot 2 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Άρα $f(2) = 2$

$$\bullet \quad f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 2$$

Δ2.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$
- $f(0) = f(2) = 2$

Από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = 0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα το ξ είναι μοναδικό. Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Δ3.

Η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα η f είναι κυρτή. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = \xi$ είναι η $y = f(\xi)$.

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq f(\xi)$

Δ4.

Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x) = \int_1^x f(t)dt - x^2 + 2x$ όπου $x \in \mathbb{R}$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών
- Η $g(1) = 1 > 0$
- Και $g(0) = \int_1^0 f(t)dt = -\int_0^1 f(t)dt$

« Έχω $f(x) \geq f(\xi) > 0$, στο $[0,1]$ άρα $\int_0^1 f(t)dt > 0 \Leftrightarrow -\int_0^1 f(t)dt < 0$ »

Επομένως, $g(0) \cdot g(1) < 0$

Από το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Επομένως, η εξίσωση $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.