ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Απαντήσεις στα θέματα των Εισαγωγικών Εξετάσεων

τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού και

τέκνων Ελλήνων Υπαλλήλων στο εξωτερικό 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 98

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.192

Α3.
α. Σ
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{2}$$

Θέτω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{x+yi-1}=\frac{x-1-yi}{(x-1)^2+y^2}=$$

$$\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}-i\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}.$$

Αφού $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{2}$

Έχουμε $\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}=\frac{1}{2}.$

$$(x-1)^2+y^2=2x-2$$

$$x^2-2x+1+y^2-2x+2=0$$

$$x^2+y^2-4x+3=0 \qquad (1)$$

$$A=-4$$

$$B=0$$

$$\Gamma=3$$

$$A^2+B^2-4\Gamma=16-12=4>0$$

Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},\frac{-B}{2}\right)$ δηλαδή $K(2,0)$ και

ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=\frac{2}{2}=1$

δηλαδή: $C:(x-2)^2+y^2=1$

χωρίς το σημείο $A(1,0)$

αφού $\begin{matrix} z-1\neq 0 \\ z\neq 1 \end{matrix}$

δηλαδή $(x,y)\neq(1,0)$

B2.

Οι εικόνες των z_1,z_2 κινούνται στον κύκλο $|z-2|=1$ δηλαδή

$$|z_1-2|=1 \,\&\, |z_2-2|=1$$

$$|z_1+z_2-4|=|z_1+z_2-2-2|=|(z_1-2)+(z_2-2)|\overset{\text{τριγ.ανισ.}}{\leq}|z_1-2|+|z_2-2|$$

Άρα $|z_1+z_2-4|\leq 2$.

Β3.

Οι μιγαδικοί z κινούνται στον κύκλο $|z-2|=1$ άρα $(x-2)^2+y^2=1 \quad (1)$

$|z|=\sqrt{5}$ Θέτω $z=x+yi \;\; x,y\in\mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$

$x^2+y^2=5 \Leftrightarrow y^2=5-x^2 \quad (2)$

Λύνουμε το σύστημα των $(1)\&(2)$

$(x-2)^2+5-x^2=1 \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}-4x+4+5-\cancel{x^2}=1 \Leftrightarrow$

$-4x=-8 \Leftrightarrow x=2$

για $x=2$

$y^2=5-4=1$

$y^2=1$

$\Leftrightarrow y=\pm 1$

άρα $z=2+i, \quad z=2-i$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x)=\frac{x}{2}\ln^2 x+x, \;\; x>0.$

$Df=(0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+\frac{\cancel{x}}{\cancel{2}}\cancel{2}\ln x\frac{1}{\cancel{x}}+1$

$=\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+1$

$\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{2}>0$

άρα η f γνησίως αύξουσα.

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+1\right)'$$

$$=\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\ln x\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{\ln x+1}{x}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0$$

$$\ln x=-1$$

$$\ln x=\ln e^{-1}$$

$$x=e^{-1}$$

$$x=\frac{1}{e}$$

	0		$1/e$	
$f''(x)$		-	0	+
$f(x)$		κοίλη		κυρτή

Σ.Κ.

Η f είναι κοίλη στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και η f κυρτή στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Γ2.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και "$1-1$".

$$f\left(x^4+2x\right)=f(4)\overset{f:"1-1"}{\Leftrightarrow}$$

$$x^4+2x=4$$

$$x^4+2x-4=0$$

Θεωρώ $g(x)=x^4+2x-4$

g συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική

$$g(1)=1+2-4=-1<0$$

$$g(2)=2^4+2\cdot 2-4=16>0$$

$$g(1)g(2)<0.$$

Από το Θεώρημα Bolzano η $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$,

άρα $\alpha=1$.

$\alpha=1$ μοναδική ρίζα αφού $g'(x)=4x^3+2>0,\ \ x>0$

Άρα η g γνησίως αύξουσα

Γ3.

$$x\ln^2 x < 2-2x$$
$$\Leftrightarrow x\ln^2 x < 2(1-x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x\ln^2 x}{2} < 1-x$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}\ln^2 x + x < 1$$
$$\Leftrightarrow f(x) < f(1)$$
$$\overset{f \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \quad x<1$$

δηλαδή $0<x<1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$3\int_1^x 2tf(t)dt + x^3 = 3x^2 f(x) + 3x - 8 \quad (1)$$

$$x>0$$

$$3\int_1^x 2tf(t)dt + x^3 - 3x + 8 = 3x^2 f(x)$$

$$f(x) = \frac{3\int_1^x 2tf(t)dt + x^3 - 3x + 8}{3x^2}$$

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$

Η συνάρτηση $g(t)=2tf(t)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η συνάρτηση $\int_1^x 2tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$.

Οι συναρτήσεις x^3-3x+8 & $3x^2$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις άρα η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζω την (1)

$$3\cdot 2xf(x)+3x^2=6xf(x)+3x^2f'(x)+3$$

$$6xf(x)+3x^2=6xf(x)+3x^2f'(x)+3$$

$$3x^2-3=3x^2f'(x)$$

$$x^2-1=x^2f'(x)$$

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}.$$

Δ2.

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$$

Από τις Συνέπειες Θ.Μ.Τ.

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+C.$$

Θέτω στη σχέση (1) για $x=1$

$$3\int_1^1 2tf(t)dt+1=3f(1)+3-8$$

$$1=3f(1)-5$$

$$6=3f(1)$$

$$f(1)=2$$

$$\Leftrightarrow 1+1+C=2$$

$$\Leftrightarrow C=0$$

Άρα $f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x},\quad x>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}\frac{-x^2}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

άρα $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$.

Δ3.

$x=1,\ x=e^2$

$$f(x)-x=\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{x^2+1-x^2}{x}=\frac{1}{x}>0,$$

$$x>0$$

$$\in(\Omega)=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^{e^2}=\ln e^2-\ln 1$$

$$=2\ln e=2\cdot 1=2\tau.\mu.$$

Δ4.

$$f'(x)>\frac{f(x)-2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}>\frac{f(x)-2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}>\frac{\frac{x^2+1}{x}-2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}>\frac{\frac{x^2+1-2x}{x}}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}>\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}>\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}>\frac{x-1\cdot x^2}{x}\Leftrightarrow$$

$$x^2-1>x^2-x$$

$$\Leftrightarrow x>1$$ <u>Ισχύει</u>