



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2026

ΘΕΜΑ Α**A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 133

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,

τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ** ⁽¹⁾ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

Έχουμε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g :

$$D_f = (1, +\infty) \quad \text{και} \quad D_g = [2, +\infty)$$

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $h = f \circ g$ είναι:

$$\begin{aligned} D_h &= D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \geq 2 \mid g(x) > 1\} = \\ &= \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} + 1 > 1\} = \\ &= \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} > 0\} = \\ &= \{x \geq 2 \mid x - 2 > 0\} = \{x \geq 2 \mid x > 2\} = (2, +\infty) \end{aligned}$$

Ο τύπος της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$ για κάθε $x > 2$ είναι:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) = 2 \ln(g(x) - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = \\ &= 2 \ln \sqrt{x-2} = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2) \end{aligned}$$

Άρα $h(x) = \ln(x-2)$ με $x > 2$.

B2. (1ος Τρόπος)

Για να δείξουμε ότι η h είναι «1-1», θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in D_h$:

$$\begin{aligned} &\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in D_h \text{ με } h(x_1) = h(x_2) \implies \\ &\implies \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \stackrel{1-1}{\implies} x_1 - 2 = x_2 - 2 \implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Επειδή από την ισότητα των τιμών προκύπτει η ισότητα των ορισμάτων, η συνάρτηση h είναι **1-1**.

Επειδή η συνάρτηση h είναι «1-1», ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} .

Θέτουμε $y = h(x)$ και λύνουμε ως προς x με τον περιορισμό $x > 2$:

$$y = \ln(x-2) \iff e^y = x-2 \iff x = 2 + e^y$$

Πρέπει:

$$x > 2 \iff 2 + e^y > 2 \iff e^y > 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Επομένως, ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι:

$$h^{-1}(x) = 2 + e^x \quad \text{με} \quad D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$$

B2. (2ος Τρόπος)

Η συνάρτηση $h(x) = \ln(x - 2)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με παράγωγο:

$$h'(x) = (\ln(x - 2))' = \frac{1}{x - 2}$$

Επειδή για κάθε $x > 2$ ισχύει $x - 2 > 0$, έχουμε $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$, επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Ως γνησίως αύξουσα, η h είναι «1-1» και άρα αντιστρέψιμη.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης h^{-1} , υπολογίζουμε το σύνολο τιμών της h :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 2) = +\infty\end{aligned}$$

Εφόσον η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, άρα $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$.

Για τον τύπο της αντίστροφης:

$$y = \ln(x - 2) \iff e^y = x - 2 \iff x = 2 + e^y$$

Επομένως, $h^{-1}(x) = 2 + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B3. (1ος Τρόπος)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\ln(x - 2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \right) = -\infty \cdot 2 = -\infty$$

Καθώς:

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = -\infty$ αφού αν θέσουμε $x - 2 = u$ τότε, όταν $x \rightarrow 2^+$ το $u \rightarrow 0^+$ δηλ.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2$$

B3. (2ος Τρόπος)

Γράφουμε το ζητούμενο όριο στη μορφή:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[h(x) \cdot \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right]$$

καθώς $f(2) = 2\ln(2 - 1) = 0$.

Γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f'(x) = \frac{2}{x-1}$, άρα $f'(2) = \frac{2}{2-1} = 2$. Συνεπώς, από τον ορισμό της παραγώγου ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 2$$

Για τον παράγοντα $h(x)$, θέτοντας $y = x - 2$, όταν $x \rightarrow 2^+$ έχουμε $y \rightarrow 0^+$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

Τελικά, το ζητούμενο όριο ισούται με:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[h(x) \cdot \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{kx^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

Εφόσον η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει το:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 + \mu x}{x^2 + 1}$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $k = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2 + 1} = \mu \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \mu \cdot 0 = 0$$

Με $\mu \neq 0$, διότι αν $k = \mu = 0$ τότε η $f(x) = 0$ (σταθερή), η οποία δεν έχει εφαπτομένη τη ευθεία $y = x$.

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Αν $k \neq 0$:

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3}{x^2} = k \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \begin{cases} +\infty, & k > 0 \\ -\infty, & k < 0 \end{cases}$$

Σε κάθε τέτοια περίπτωση το αποτέλεσμα είναι άτοπο, καθώς το όριο πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός ℓ .

Άρα για $k = 0$:

$$f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$$

Και επειδή η ευθεία $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$, γνωρίζουμε ότι:

$$f'(0) = 1 \quad \text{και} \quad f(0) = 0$$

Είναι:

$$f'(x) = \frac{\mu \cdot (x^2 + 1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Οπότε:

$$f'(0) = \frac{\mu \cdot 1 - 0}{1} = 1 \implies \mu = 1$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad A_f = \mathbb{R}$$

Γ2.

ι)

Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ με $A_f = \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Πίνακας Μεταβολών της f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		T.E.	T.M.		

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και στο $[1, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

Παρουσιάζει:

- Τοπικό ελάχιστο (T.E.) στο $x = -1$ το $f(-1) = -\frac{1}{2}$.
- Τοπικό μέγιστο (T.M.) στο $x = 1$ το $f(1) = \frac{1}{2}$.

ιι)

Αρχικά υπολογίζουμε τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Χωρίζουμε το πεδίο ορισμού στα διαστήματα μονοτονίας της f και βρίσκουμε τα αντίστοιχα σύνολα τιμών:

- Για $A_1 = (-\infty, -1]$, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής:

$$f(A_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

- Για $A_2 = (-1, 1)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής:

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

- Για $A_3 = [1, +\infty)$, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής:

$$f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

Άρα το συνολικό σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A_f) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

Είναι γνωστό ότι $\frac{1}{2} + a^2 \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

- Για $a = 0$:

Η τιμή γίνεται $\frac{1}{2} + 0^2 = \frac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι το $\frac{1}{2} \in f(A_3)$ και η $f \searrow A_3$ ενώ $\frac{1}{2} \notin f(A_1)$ και $\frac{1}{2} \notin f(A_2)$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει **μία ακριβώς ρίζα** (την $x = 1$).

- Για $a \neq 0$:

Η τιμή γίνεται $\frac{1}{2} + a^2 > \frac{1}{2}$, οπότε $\frac{1}{2} + a^2 \notin f(A_f)$.

Άρα η εξίσωση είναι **αδύνατη**

Γ3.

ι)

Έχουμε το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$$

Οπότε:

$$I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx$$

Άρα:

$$\begin{aligned} I_\nu + I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} \end{aligned}$$

υ)

Για $\nu = 0$ έχουμε:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{2}$$

Ακόμη, από τη σχέση $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$ που δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα:

– Για $\nu = 0$:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \implies I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

– Για $\nu = 1$:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \implies I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2 - 2\ln 2}{4} = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, g' συνεχής και:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ①
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε $g(x_1) + x_1 = 0$.

Έστω $h(x) = g(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$

- Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, καθώς g συνεχής ως παραγωγίσιμη.
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$, καθώς ① $\xrightarrow{x=-1} g(-1) < 1 \Leftrightarrow g(-1) - 1 < 0$
- $h(0) = g(0) > 0$, καθώς ① $\xrightarrow{x=0} g(0) > 0$

Δηλαδή $h(-1) \cdot h(0) < 0$, άρα από θεώρημα **Bolzano** η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-1, 0)$.

Επίσης, η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = g'(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η h' είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, καθώς g' συνεχής και $g'(x) \neq -1 \Leftrightarrow h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} .

Αν $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $h \uparrow \mathbb{R}$.

Αν $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $h \downarrow \mathbb{R}$.

Σε κάθε περίπτωση, η h είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} .

Οπότε τελικά υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

Δ1. (2ος τρόπος)

Είναι $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω, ότι η h έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 0)$ με $\rho_1 < \rho_2$, και $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$.

Καθώς, η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , σύμφωνα με το **Θ. Rolle**, θα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = 0$.

Άτοπο.

Συνεπώς, η h έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-1, 0)$.

Δ2.

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - kx, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, \quad D_f = \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, \frac{\pi}{2})$, θα πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη και στο 0. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x(g(x) + x)] = 0 \cdot (g(0) + 0) = 0, \\ &\text{καθώς η } g \text{ συνεχής στο } 0. \\ - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - k \right] = \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{1} - k = 3 - k \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 3$$

Δ3.

Για $k = 3$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

ι)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{\pi}{2})$ με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Σχήμα Horner για τον αριθμητή:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -3 & 0 & 1 & \rho = 1 \\ & 2 & -1 & -1 & \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 & \end{array} \implies (2\sigma\nu\nu^2x - \sigma\nu\nu x - 1)$$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & -1 & -1 & \rho = 1 \\ & 2 & 1 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & \end{array} \implies (2\sigma\nu\nu x + 1)$$

Για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει:

$$(\sigma\nu\nu x - 1)^2 > 0, \quad \sigma\nu\nu^2x > 0 \quad \text{και} \quad \sigma\nu\nu x > 0 \implies 2\sigma\nu\nu x + 1 > 0$$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2})$, οπότε $f \uparrow [0, \frac{\pi}{2})$.

Επομένως, για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ έχουμε:

$$x \geq 0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

ι)

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει ακριβώς μία ρίζα, x_2 , στο $[0, \frac{\pi}{2})$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2})$ και γνησίως αύξουσα, άρα:

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

καθώς:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = 2\eta\mu \frac{\pi}{2} + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$$

διότι:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\nu\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\sigma\nu\nu x} \cdot \eta\mu x\right) = +\infty \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} = +\infty$$

εφόσον: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\nu\nu x = \sigma\nu\nu \frac{\pi}{2} = 0$ και $\sigma\nu\nu x > 0$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}^-$.

Οπότε, το $\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$ και η $f \uparrow [0, \frac{\pi}{2})$, άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει ακριβώς μία ρίζα, x_2 , στο $[0, \frac{\pi}{2})$.

Δ4.

ι)

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$f(x) = x^2(g(x) + x) = x^2 \cdot h(x)$$

καθώς $h(x) = g(x) + x$.

Από το ερώτημα **Δ1** γνωρίζουμε ότι η μοναδική ρίζα της $h(x) = 0$ στο \mathbb{R} είναι η $x = x_1 \in (-1, 0)$.

Άρα για κάθε $x \in (x_1, 0]$ ισχύει $h(x) \neq 0$, και επειδή η h είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(x_1, 0]$.

Επειδή $h(0) = g(0) > 0$ (από τη σχέση **①**), συμπεραίνουμε ότι:

$$h(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (x_1, 0]$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $x^2 > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, οπότε τελικά:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in [x_1, 0]$$

(καθώς για $x = x_1$ είναι $h(x_1) = 0 \implies f(x_1) = 0$, και για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$).

υ)

Από το ερώτημα **Δ3 υ)** έχουμε ότι $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{3}]$, οπότε το εμβαδόν $E(\Omega)$ ισούται με:

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

καθώς από προηγούμενα ερωτήματα έχουμε:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in [x_1, 0] \quad \text{και} \quad f(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0, \frac{\pi}{3}] \subseteq [0, \frac{\pi}{2}]$$

Άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, \frac{\pi}{3}]$.

Εφόσον ο άξονας $y'y$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^3 dx + \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\eta\mu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\nu\nu x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3x dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 + I = [-2\sigma\nu\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} - [\ln|\sigma\nu\nu x|]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{x_1^4}{4} + I = -2\sigma\nu\nu \frac{\pi}{3} + 2\sigma\nu\nu 0 - \ln\left(\sigma\nu\nu \frac{\pi}{3}\right) + \ln(\sigma\nu\nu 0) - \frac{3\pi^2}{18} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{x_1^4}{4} + I = 1 - \ln \frac{1}{2} + \ln 1 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{x_1^4}{4} + I = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow I = \frac{x_1^4}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

όπου $I = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx$ και από $\Delta 1$ $g(x_1) = -x_1$.

Επομένως, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx &= [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx = \\ &= -x_1^3 g(x_1) - 3 \cdot I = x_1^4 - 3 \left(\frac{x_1^4}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) = \\ &= x_1^4 - \frac{3x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3. \end{aligned}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ