

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 262

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 141

A3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 246

A4. α) Λ , β) Σ , γ) Λ , δ) Σ , ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $A_f = \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως ρητή με : $f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

Άρα : $f \downarrow (-\infty, 0]$ και $f \uparrow [0, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 0$

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ως ρητή με

$$f''(x) = 2 \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = 2 \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Η f κοίλη για $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και για $x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ και η f κυρτή για $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, δηλαδή

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και για $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ το σημείο $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

B3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}.$

➤ Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

➤ Για πλάγιες - οριζόντιες έχω :

• Στο $-\infty$ είναι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

• Στο $+\infty$ είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

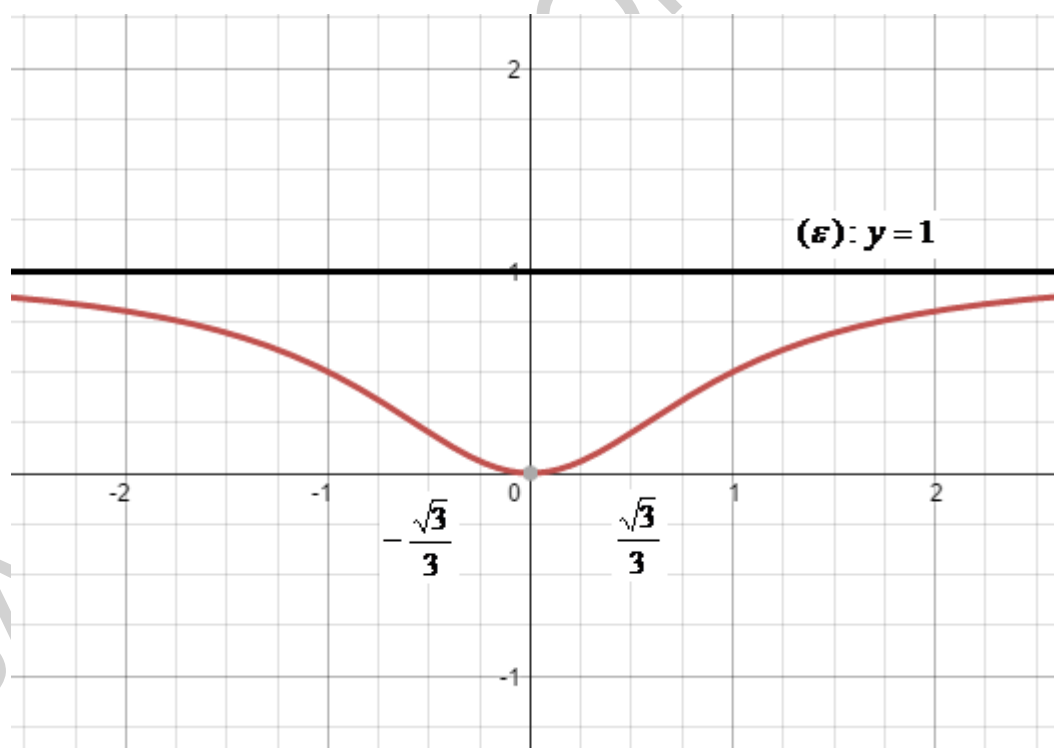
άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. Για κάθε $x \in A_f = \mathbb{R}$ και $-x \in A_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = f(x)$, άρα η f είναι άρτια με άξονα συμμετρίας τον y .

Πίνακας μεταβολών :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+		+	0	-
$f'(x)$	-		-	0	+		+
$f(x)$							



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}.$

1^{ος} Τρόπος : Έστω $g(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, A_g = \mathbb{R}$, συνεπώς έχω να λύσω την εξίσωση $g(x) = 0$. Παρατηρώ ότι, η $x = 0$ προφανής ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $g'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{ή} \\ e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $g(0) = 0$, δηλ.

$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε στην εξίσωση $g(x) = 0$ η προφανής ρίζα $x = 0$ είναι και μοναδική ως θέση ακροτάτου.

2^{ος} Τρόπος :

Ισχύει: $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Για x το $e^{x^2} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχω: $\ln e^{x^2} \leq e^{x^2} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\ln e^{x^2} \leq e^{x^2} - 1 \Leftrightarrow x^2 \leq e^{x^2} - 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ είναι η $x = 0$.

Γ2. Είναι: $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)| \underset{\Gamma 1.}{\overset{g(x) \geq 0}{\Leftrightarrow}} |f(x)| = g(x)$

➤ Για $x = 0$ είναι: $|f(0)| = g(0) \Leftrightarrow |f(0)| = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

➤ Για $x > 0$ είναι: $f^2(x) > 0$ άρα $g(x) \neq 0$ άρα $f(x) \neq 0$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(0, +\infty)$

- Αν $f(x) > 0$ τότε $f(x) = g(x)$ (1)
- Αν $f(x) < 0$ τότε $f(x) = -g(x)$ (2)

➤ Για $x < 0$ είναι: $f^2(x) > 0$ άρα $g(x) \neq 0$ άρα $f(x) \neq 0$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty, 0)$

- Αν $f(x) > 0$ τότε $f(x) = g(x)$ (3)
- Αν $f(x) < 0$ τότε $f(x) = -g(x)$ (4)

Τελικά :

1^{ov} από (1), (3) $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ αφού για $x=0, f(0)=0$

2^{ov} από (1), (4) $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}$ αφού για $x=0, f(0)=0$

3^{ov} από (2), (3) $f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \geq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$ αφού για $x=0, f(0)=0$

4^{ov} από (2), (4) $f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ αφού για $x=0, f(0)=0$

Γ3. $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 e^{x^2} \geq 0$ (*) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το “=” ισχύει μόνο για $x=0$, όπου f είναι συνεχής, άρα η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(*) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow 2(e^{x^2} - 1) \geq 0$

και $4x^2 e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ4. Έστω $h(x) = f(x+3) - f(x), x \in [0, +\infty)$,

h παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με : $h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$

Για $x \geq 0$ έχουμε $x < x+3 \xrightarrow[f: \text{κυρτή}]{f' \uparrow} f'(x) < f'(x+3) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ και h συνεχής στο $[0, +\infty)$

ως πράξεις συνεχών άρα h γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα «1-1» στο $[0, +\infty)$. Έτσι :

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \Leftrightarrow h(|\eta\mu x|) = h(x) \xrightarrow{1-1} |\eta\mu x| = x \xrightarrow{x \geq 0} |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$$

Καθώς : $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

- $$\begin{aligned} \int_0^\pi (f(x) + f''(x))\eta\mu x dx &= \pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx + \int_0^\pi f''(x)\eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)' dx + \int_0^\pi (f'(x))'\eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)(-\sigma\upsilon\nu x) dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(\pi)(-\sigma\upsilon\nu\pi) - f(0)(-1) + \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx + f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0 - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi. \end{aligned}$$

- Θεωρώ την $R(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}$, για κάθε x κοντά στο μηδέν, με $\lim_{x \rightarrow 0} R(x) = 1$

Άρα : $f(x) = \eta\mu x \cdot R(x)$

Η f συνεχής στο $x_0 = 0$, έτσι : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Άρα : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot R(x)) \stackrel{f: \text{συνεχής}}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$

έτσι : $f(\pi) + f(0) = \pi \Leftrightarrow f(\pi) = \pi$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, έτσι : $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot R(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot R(x) \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα : $f'(0) = 1$.

Δ2

α) 1^{ος} Τρόπος :

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε καθώς είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από Θ.Fermat $f'(x_0) = 0$.

Τα μέλη στη σχέση $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ (1) είναι παραγωγίσιμα ($x, e^x, f(x)$) παραγωγίσιμες, άρα $e^{f(x)}, f(f(x))$ παραγωγίσιμες, ως σύνθεση παραγωγίσιμων) οπότε με παραγωγή της (1) έχουμε :

$$f'(x)e^{f(x)} + 1 = f'(f(x))f'(x) + e^x \quad (2)$$

Η σχέση (2) για $x = x_0$ γίνεται :

$$f'(x_0)e^{f(x_0)} + 1 = f'(f(x_0))f'(x_0) + e^{x_0} \stackrel{f'(x_0)=0}{\Leftrightarrow} 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0,$$

άρα $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$ που είναι άτοπο καθώς $f'(0) = 1$, επομένως η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

2^{ος} Τρόπος :

Τα μέλη στη σχέση $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ είναι παραγωγίσιμα ($x, e^x, f(x)$ παραγωγίσιμες, άρα $e^{f(x)}, f(f(x))$ παραγωγίσιμες, ως σύνθεση παραγωγίσιμων) οπότε μετά από παραγωγή έχουμε : $e^{f(x)}f'(x) + 1 = f'(f(x))f'(x) + e^x \Leftrightarrow f'(x)[e^{f(x)} - f'(f(x))] = e^x - 1$

Για $x=0$ ισχύει η ισότητα

Για $x \neq 0$ έχουμε ότι $e^x - 1 \neq 0$, άρα και

$$f'(x)[e^{f(x)} - f'(f(x))] \neq 0 \Leftrightarrow f'(x) \neq 0 \text{ και } e^{f(x)} - f'(f(x)) \neq 0$$

Επιπλέον έχουμε $f'(0)=1 \neq 0$, άρα $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Από Δ2. α) έχουμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f' συνεχής (η f δυο φορές παραγωγίσιμη), άρα από συνέπειες Θ. Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επιπλέον : $f'(0) = 1 > 0$, άρα τελικά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f \uparrow \mathbb{R}$.

Δ3.

$$\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{2}{|f(x)|} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα : } -\frac{2}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{|f(x)|} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \\ f \text{ συνεχής} \uparrow \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Άρα : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{|f(x)|} \right) = 0 \\ \text{και} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{|f(x)|} = 0 \end{cases} \quad \text{άρα από κριτήριο παρεμβολής : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ4

1^{ος} Τρόπος :

Καθώς $x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq 0 \xRightarrow{f \uparrow} f(\ln x) \geq f(0) \Rightarrow f(\ln x) \geq 0 \Rightarrow \frac{f(\ln x)}{x} \geq 0$ και η ισότητα ισχύει

μόνο για $x=1$. Άρα : $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0$.

Επίσης : $x \leq e^\pi \Rightarrow \ln x \leq \pi \xRightarrow{f \uparrow} f(\ln x) \leq f(\pi) \Rightarrow f(\ln x) \leq \pi \Rightarrow \frac{f(\ln x)}{x} \leq \frac{\pi}{x} \Rightarrow \frac{\pi}{x} - \frac{f(\ln x)}{x} \geq 0$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = e^\pi$. Άρα :

$$\int_1^{e^\pi} \left(\frac{\pi}{x} - \frac{f(\ln x)}{x} \right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x} dx - \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0 \Leftrightarrow \pi [\ln x]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \pi (\ln e^\pi - \ln 1) > \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx \Leftrightarrow \pi^2 > \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx.$$

Άρα τελικά : $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

2^{ος} Τρόπος :

Θέτω $u = \ln x$, άρα $du = \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow dx = x du$.

Για $x=1$ είναι $u=0$

Για $x=e^\pi$ είναι $u=\pi$

Έτσι έχω : $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi \frac{f(u)}{x} x du = \int_0^\pi f(u) du$.

Οπότε αρκεί να δείξω ότι : $0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$

Είναι : $0 \leq u \leq \pi \Leftrightarrow f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Leftrightarrow 0 \leq f(u) \leq \pi$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $u=0$ και $u=\pi$, άρα :

$$0 < \int_0^\pi f(u) du < \int_0^\pi \pi du \Leftrightarrow 0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi(\pi - 0) \Leftrightarrow 0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2.$$

Πιο αναλυτικά : η f συνεχής στο $[0, \pi]$ με $f(u) \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $u=0$

άρα : $\int_0^\pi f(u) du > 0$

Επιπλέον $f(u) \leq \pi \Leftrightarrow \pi - f(u) \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $u=\pi$

άρα : $\int_0^\pi (\pi - f(u)) du > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi \pi du > \int_0^\pi f(u) du \Leftrightarrow \int_0^\pi f(u) du < \pi[x]_0^\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$. Οπότε τελικά προκύπτει το ζητούμενο : $0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$.

Επιμέλεια Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη