ΒΑΚΑΛΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
από το 1967

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΘΕΜΑ Α

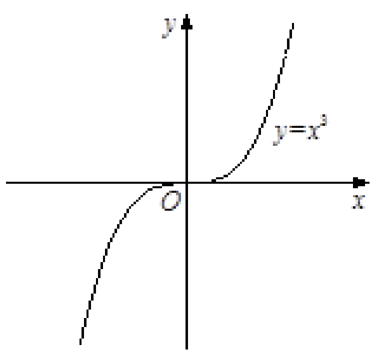
Α1. Σχολικό σελ. 76

Α2. Σχολικό σελ. 104

Α3.
α. Ψ

β. Αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Re$. (Σχολικό σελ. 136)



Α4. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$f:(1,+\infty)\to\Re$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\Re\to\Re$, $g(x)=e^x$

Β1. $D_f=(1,+\infty)$, $D_g=\Re$

Για να ορίζεται η $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$ πρέπει :

$$\begin{cases} x\in D_g \\ \kappa\alpha\iota \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \Re \\ \kappa\alpha\iota \\ e^x\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \Re \\ \kappa\alpha\iota \\ e^x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \Re \\ \kappa\alpha\iota \\ e^x>e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \Re \\ \kappa\alpha\iota \\ x>0 \end{cases}$$

Επομένως : $D_{f\circ g}=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}=(0,+\infty)$.

$$\big(f\circ g\big)(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{g(x)+2}{g(x)-1}=\frac{e^x+2}{e^x-1},\ x>0.$$

Β2. $\big(f\circ g\big)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, $x>0$.

<u>1ος τρόπος</u> :

Για κάθε $x_1,x_2\in D_{f\circ g}=(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)=(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+2)\Rightarrow e^{x_1}\cdot e^{x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1}\cdot e^{x_2}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2\Rightarrow$

$\Rightarrow 3e^{x_1}=3e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$, άρα η f είναι «1-1» οπότε είναι αντιστρέψιμη.

<u>2ος τρόπος</u> :

Η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με :

$\big(f\circ g\big)'(x)=\left(\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\right)'=\dfrac{e^x(e^x-1)-(e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0$ για κάθε $x>0$, άρα η $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ επομένως η f είναι «1-1» οπότε είναι αντιστρέψιμη.

Η $f\circ g$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ άρα :

$D_{(f\circ g)^{-1}}=(f\circ g)\big((0,+\infty)\big)=\Big(\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f\circ g\big)(x),\lim\limits_{x\to 0^+}\big(f\circ g\big)(x)\Big)=(1,+\infty)$, καθώς :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f\circ g\big)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f\circ g\big)(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(e^x+2)\cdot\dfrac{1}{e^x-1}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(e^x+2)\cdot\dfrac{1}{e^x-1}\right]=3\cdot(+\infty)=+\infty$

καθώς $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x+2)=3$, $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-1)=0$ και για κάθε

$x>0\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$ κοντά στο 0^+, επομένως : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{e^x-1}=+\infty$.

Άρα για κάθε $x>0$ και $y>1$ θέτουμε $(f\circ g)(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{e^x+2}{e^x-1}=y \Leftrightarrow e^x+2=y\cdot e^x-y \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y\cdot e^x-e^x=y+2 \Leftrightarrow e^x(y-1)=y+2 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x=\frac{y+2}{y-1} \overset{\frac{y+2}{y-1}>0}{\Leftrightarrow} x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (f\circ g)^{-1}(y)=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$, $y>1$. Επομένως : $(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, $x>1$.

Β3. $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right), \quad x>1$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με :

$$\phi'(x)=\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{-3}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}$$

Για κάθε $x>1$:

- $x>1 \Rightarrow x+2>0$
- $x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow (x-1)^2>0$

Οπότε $\varphi'(x)<0$ για κάθε $x>1$. Επομένως, η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Β4. Για κάθε $x>1$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\right]$

  Θέτουμε $u=\dfrac{x+2}{x-1}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}u=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$

  καθώς $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$

  $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ και $x-1>0$ κοντά στο 1^+, άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

  Επομένως, $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\right]=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\right]$

  Θέτουμε $u=\dfrac{x+2}{x-1}$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

  Επομένως, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\right]=\lim\limits_{u\to 1}\ln u=\ln 1=0$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

Γ1. Η f θα είναι συνεχής και στο $x_o=0$ επομένως

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=1-\ln\lambda\Leftrightarrow$$

$$\lambda=1-\ln\lambda\Leftrightarrow\ln\lambda+\lambda-1=0\quad(1)$$

Έστω συνάρτηση $g(x)=\ln x+x-1$, $x>0$, $g(1)=0$

Για κάθε $x>0$ $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Άρα η (1) γράφεται $(1)\Leftrightarrow g(\lambda)=g(1)\overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow}\lambda=1$

Γ2. Προφανώς $f(0)=1$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0)=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}=1$

Είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{(1-x)x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$

Αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\in R \text{ άρα } f'(0)=1$$

Γ3. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι

- Τα εσωτερικά σημεία του $\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται. Δεν υπάρχουν τέτοια καθώς $f'(0)=1$ άρα η f παραγωγίσιμη στο 0 και η f παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$και $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων .

- Τα εσωτερικά σημεία του $\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ στα οποία μηδενίζεται η f'

Για $x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in Z$

Όμως $0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \kappa\pi < \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \kappa < \frac{5}{4}$

Αφού $\kappa \in Z$ έχουμε $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$

Για $\kappa = 0$ $x = \frac{\pi}{4}$

Για $\kappa = 1$ $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$.

(*) αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ θα είναι και $\eta\mu x = 0$ άτοπο καθώς $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ $x \in R$

Γ4. $\alpha'(t) = -\frac{a(t)}{3}$ (2) $a(t_o) = -1$

Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\alpha, f(a))$

Είναι : (ε) $y - f(a) = f'(a)(x-a) \Leftrightarrow y - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x-a)$

Για $y = 0$ $-\frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x-a) \overset{a\neq 1}{\Leftrightarrow} x - a = a - 1 \Leftrightarrow x = 2a - 1, \alpha \leq 0$

Συνεπώς $B(2\alpha - 1, 0)$ και $x(t) = 2a(t) - 1$

Παραγωγίζοντας έχουμε $x'(t) = 2a'(t) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x'(t) = -\frac{2}{3}a(t)$ (3)

Για $t = t_o$ η (3) $x'(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_o) = \frac{2}{3}$ $\mu o\nu.\mu\eta\kappa o\upsilon\varsigma / \mu o\nu.\chi\rho o\nu o\upsilon$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1, x \in \mathbb{R}$

Η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x + 2x - e, x \in \mathbb{R}$

Η f' παραγωγίσιμη με $f''(x) = e^x + 2 > 0, x \in \mathbb{R}$, άρα η f' γνησίως αύξουσα,

άρα η f' έχει μία ρίζα το πολύ

Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$, με $f'(0) = 1 - e < 0$ και $f'(1) = 2 > 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f'(x_0) = 0$

Έπιπλέον η f' γνησίως αύξουσα, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Για $x_0 < x$ προκύπτει $f'(x_0) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ αφού f' γνησίως αύξουσα

Για $x < x_0$ προκύπτει $f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, αφού f' γνησίως αύξουσα

x	$-\infty$ 0	x_0	1 $+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,x_0]$, f'(x)<0 για κάθε $x\in(-\infty,x_0)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_0]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_0,+\infty)$, f'(x)>0 για κάθε $x\in(x_0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x^2-ex-1)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-ex-1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x^2-ex-1)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-ex-1)=+\infty$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0

Έχουμε
$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0\Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$$
$$f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1=e-2x_0+x_0^2-ex_0-1=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$$

Δ2. 1^{ος} Τρόπος :

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)\right]=$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)=\lim\limits_{t\to 0}(t\cdot\eta\mu\frac{1}{t})=0$, όπου $t=x-x_0$ με $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=0$

Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{x-x_0}=+\infty$, αφού $x-x_0>0$ για κάθε x κοντά στο x_0 και $x>x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=+\infty$, αφού για $x>x_0 \Leftrightarrow x-x_0>0$ και $f(x)>f(x_0)$ για κάθε x κοντά στο x_0,

αφού η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(x_0)$

δηλαδή $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ με $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{1}{x-x_0}=-\infty$, αφού $x-x_0<0$ για κάθε x κοντά στο x_0 και $x<x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=-\infty$, αφού για $x<x_0 \Leftrightarrow x-x_0<0$ και $f(x)>f(x_0)$ για κάθε x κοντά στο x_0,

αφού η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(x_0)$

δηλαδή $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$ με $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)\right]=+\infty$

$$\lim_{x\to x_0^-}\left[\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)\right]=+\infty$$

άρα τοζητούμενο $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)\right]=+\infty$

2ος Τρόπος :

$$-1 \le \eta\mu \frac{1}{x-x_0} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{1}{f(x)-f(x_0)} \le \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu \frac{1}{x-x_0} \le 1 + \frac{1}{f(x)-f(x_0)}$$

Όπου $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} = +\infty$

Καθώς $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = f(x_0)-f(x_0) = 0$, διότι f συνεχής στο x_0

Και $f(x) > f(x_0)$, κοντά στο x_0 . Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right) = +\infty$

Οπότε και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right) = +\infty$

Δ3. $f(x)+x = x_0$

Θεωρούμε συνάρτηση $R(x) = f(x)+x-x_0$ συνεχής στο $[0,1]$

$R(x_0) = f(x_0) < 0$, διότι : $0 < x_0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(0) > f(x_0) \Leftrightarrow 0 > f(x_0)$

$R(1) = f(1)+1-x_0 = 1-x_0 > 0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_0,1)$

Ώστε $R(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho)+\rho-x_0 = 0$

$R'(x) = f'(x)+1 > 0$ για κάθε $x \in (x_0,1)$ οπότε R γνησίως αύξουσα στο $(x_0,1)$

Άρα η ρίζα ρ είναι μοναδική.

Δ4.

$f(x_0) > f(\rho)(f'(k)+1) \Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho)f'(k)+f(\rho) \Leftrightarrow f(x_0)-f(\rho) > f(\rho)f'(k)$

Καθώς ρ ρίζα της $f(x)+x = x_0$ άρα $f(\rho)+\rho = x_0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0-\rho < 0$ καθώς $x_0 < \rho < 1$

οπότε $\frac{f(x_0)-f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0} < f'(\kappa)$

η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

από Θεώρημα Μέσης τιμής στο $[x_0,\rho]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x_0,\rho)$ ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $f'(\xi) < f'(\kappa)$

Είναι : $x_0 < \xi < \rho < \kappa < 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa)$.