ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ από το 1967

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 74

Α4. **α)** Ψ

β) Αντιπαράδειγμα με τη συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu+1}$,στη σελίδα 61 του σχολικού βιβλίου.

Α5. **α)** Σωστό **β)** Σωστό **α)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-3}\ ,\quad x\in\Re-\{3\}$$

Β1. $D_f=\Re-\{3\}$

Για κάθε $x_1,x_2\in D_f=\Re-\{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{3x_1+1}{x_1-3}=\frac{3x_2+1}{x_2-3}\Rightarrow(3x_1+1)(x_2-3)=(3x_2+1)(x_1-3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3\Rightarrow-10x_1=-10x_2\Rightarrow x_1=x_2\,.$$

Άρα η f είναι 1-1 στο $D_f=\Re-\{3\}$, οπότε αντιστρέφεται στο $D_f=\Re-\{3\}$.

Β2. Εφόσον η f αντιστρέφεται στο $D_f=\Re-\{3\}$, για κάθε $x\neq3$ θέτουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{3x+1}{x-3}=y\Leftrightarrow3x+1=(x-3)\,y\Leftrightarrow3x+1=xy-3y\Leftrightarrow xy-3x=3y+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y-3)x=3y+1\underset{y\neq3}{\overset{y-3\neq0}{\Leftrightarrow}}x=\frac{3y+1}{y-3},\ y\neq3\,.$$

Όμως $x\neq3\Leftrightarrow\frac{3y+1}{y-3}\neq3\Leftrightarrow3y+1\neq3y-9\Leftrightarrow1\neq-9$ που ισχύει για κάθε $y\neq3$.

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{3y+1}{y-3}$, $y\neq3$. Δηλαδή $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-3}$, $x\neq3$

Επομένως τελικά,

- $D_f=D_{f^{-1}}=\Re-\{3\}$ και
- για κάθε $x\in D_f=D_{f^{-1}}=\Re-\{3\}$ ισχύει $f(x)=f^{-1}(x)$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Β3. Η συνάρτηση $(f\circ f)(x)$ έχει πεδίο ορισμού $\mathrm{D}_{f\circ f}=\{x\in D_f\ /\ f(x)\in D_f\}$

Για να ορίζεται λοιπόν η συνάρτηση $(f\circ f)(x)=f(f(x))$ πρέπει:

$$\begin{cases}x\in D_f\\ \kappa\alpha\iota\\ f(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq3\\ \kappa\alpha\iota\\ \frac{3x+1}{x-3}\neq3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq3\\ \kappa\alpha\iota\\ 3x+1\neq3x-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq3\\ \kappa\alpha\iota\\ 1\neq-9\,\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\end{cases}\Leftrightarrow x\neq3$$

Άρα $\mathrm{D}_{f\circ f}=\Re-\{3\}$

και $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{3f(x)+1}{f(x)-3}=\frac{3\frac{3x+1}{x-3}+1}{\frac{3x+1}{x-3}-3}=\frac{\frac{9x+3+x-3}{x-3}}{\frac{3x+1-3x+9}{x-3}}=\frac{9x+3+x-3}{3x+1-3x+9}=\frac{10x}{10}=x$

Οπότε $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathrm{D}_{f\circ f}=\Re-\{3\}$.

Β4. $\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{3x+1}\right)=\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(\frac{3x+1}{x-3}\cdot \eta\mu\frac{1}{3x+1}\right)=0$

καθώς, $\left|\frac{3x+1}{x-3}\cdot \eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|=\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|\le\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\cdot 1=\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|$

άρα $-\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\le\frac{3x+1}{x-3}\cdot \eta\mu\frac{1}{3x+1}\le\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|$

Έχουμε, $\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(-\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\right)=\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\right)=0$

Επομένως, από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{3x+1}\right)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{BOM}}$ ισχύει $\eta\mu\theta=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{OB}}\Leftrightarrow \eta\mu\theta=\frac{\mathrm{BM}}{1}\Leftrightarrow \mathrm{BM}=\eta\mu\theta$

Άρα $\mathrm{B\Gamma}=2\mathrm{BM}=2\eta\mu\theta$

Στο ίδιο τρίγωνο έχουμε $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OB}}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\mathrm{OM}}{1}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\mathrm{OM}$

Άρα $\mathrm{AM}=\mathrm{AO}+\mathrm{OM}=1+\sigma\upsilon\nu\theta$

$\mathrm{E}_{\mathrm{AB\Gamma}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{AM}}{2}$ ή $\mathrm{E}(\theta)=\frac{2\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{2}$

$\mathrm{E}(\theta)=\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$,θ∈ $(0,\pi)$

Γ2. $\mathrm{E}(\theta)=(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta$

$\mathrm{E}'(\theta)=-\eta\mu\theta\eta\mu\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu^2\theta$

$=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1+\sigma\upsilon\nu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1=2(\sigma\upsilon\nu\theta+1)(\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2})$

$\mathrm{E}'(\theta)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$

Το πρόσημο της $\mathrm{E}'(\theta)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}$ καθώς $\sigma\upsilon\nu\theta+1>0$, για κάθε θ∈ $(0,\pi)$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\mathrm{E}'(\theta)$	+	0	-
E	↗	Ο.Μ	↘

$$E'(\theta)>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta<\frac{\pi}{3}$$

Καθώς η συνθ είναι γνησίως φθίνουσα για θ∈(0,π)

Άρα για $\theta=\frac{\pi}{3}$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Γ3. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta=\frac{3}{4}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις

$\Delta_1=\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$ στο Δ_1 η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$$E(\Delta_1)=\left(\lim_{\theta\to 0}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

$\frac{3}{4}\in E(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $\theta_1\in\Delta_1$ ώστε $E(\theta_1)=\frac{3}{4}$ και αφού η Ε είναι γνησίως αύξουσα το θ_1 είναι μοναδικό.

$\Delta_2=\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$E(\Delta_2)=\left(\lim_{\theta\to \pi^-}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$\frac{3}{4}\in E(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $\theta_2\in\Delta_2$ ώστε $E(\theta_2)=\frac{3}{4}$ και αφού η Ε είναι γνησίως φθίνουσα το θ_2 είναι μοναδικό.

Γ4. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής για την Ε στο $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$

Η Ε είναι συνεχής στο $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$

Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$

Άρα από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_1\in\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε

$$E'(\xi_1)=\frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)-E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}=\frac{\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\frac{\pi}{3}-E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}-E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}-E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}$$

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής για την Ε στο $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$

Η Ε είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$

Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$

Άρα από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_2\in\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$ τέτοιο ώστε

$$\mathrm{E}'(\xi_2)=\frac{\mathrm{E}(\theta_2)-\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}=\frac{\mathrm{E}(\theta_2)-\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\frac{\pi}{3}}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}=\frac{\mathrm{E}(\theta_2)-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}=\frac{\mathrm{E}(\theta_2)-\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}$$

$\mathrm{E}'(\xi_2)\neq 0$ καθώς το $\xi_2\in\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$

$$\frac{\mathrm{E}'(\xi_1)}{\mathrm{E}'(\xi_2)}=\frac{\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}-\mathrm{E}(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}}{\dfrac{\mathrm{E}(\theta_2)-\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}}=\frac{\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}-\mathrm{E}(\theta_1)\right]\left(\theta_2-\frac{\pi}{3}\right)}{\left[\mathrm{E}(\theta_2)-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)}=\frac{-\left(\mathrm{E}(\theta_1)-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\left(\theta_2-\frac{\pi}{3}\right)}{\left[\mathrm{E}(\theta_2)-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)}$$ και από το Γ3

προκύπτει

$$\mathrm{E}'(\xi_1)\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)=-\mathrm{E}'(\xi_2)\left(\theta_2-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\mathrm{E}'(\xi_1)\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)=\mathrm{E}'(\xi_2)\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x)=x\cdot\ln x-\ln(\lambda x)\ ,x>0,\ \ \lambda>0.$$
$$g(x)=x^x=e^{x\cdot\ln x}\ ,x>0$$

Δ1.

$$f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x},x>0\text{ , με }f'(1)=0$$
$$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0,\text{ για κάθε x>0 και η }f'\uparrow(0,+\infty)$$
$$0<x<1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$$
$$x>1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$$

και η f συνεχής στο 1, συνεπώς παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1)=-\ln\lambda$.
Το σημείο ακροτάτου της f είναι το $A(1,-\ln\lambda)$ το οποίο ανήκει στην ευθεία $x=1$, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Για κάθε $x>0$ ισχύει: $x^x\geq\lambda x\Leftrightarrow x\cdot\ln x\geq\ln(\lambda x)\Leftrightarrow f(x)\geq 0\Leftrightarrow minf\geq 0\Leftrightarrow-\ln\lambda\geq 0\Leftrightarrow$ $\ln\lambda\leq 0\Leftrightarrow\ln\lambda\leq\ln 1\Leftrightarrow 0<\lambda\leq 1$.
Άρα, $\lambda max=1$.

Δ3. $g'(x)=x^x(\ln x+1),x>0$.
Για $\lambda=1$ η ευθεία γίνεται (ε): $y=x$.
Για να εφάπτεται η (ε) της C_g αρκεί να υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases}g(x_0)=x_0\\ g'(x_0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^{x_0}=x_0\\ x_0^{x_0}(\ln x_0+1)=1\end{cases}$$

Από τις δύο εξισώσεις έχουμε :

$$x_0(\ln x_0 + 1) = 1 \overset{x_0>0}{\Longleftrightarrow} \ln x_0 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \overset{\Delta 1}{\Leftrightarrow} x_0 = 1$$

Από Δ2 $g(x) \geq \lambda x \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $\lambda = 1$. Συνεπώς, $g(x) > \lambda x \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1$ και δεν υπάρχει άλλη εφαπτομένη της C_g της μορφής $y = \lambda x$.

Δ4. I) Η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων e^x και $x \cdot \ln x$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln x^x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x} = 1$ γιατί θέτοντας $u = x\ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ **, έχουμε**

$\lim\limits_{x\to 0} u = \lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ **,** συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$

Άρα η h είναι συνεχής στο 0 αφού ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0) = 1$**.**

Τελικά, η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

ii) Έστω $F(x) = x^{2020}(3 - 2\int_1^2 g(t)dt) + (1 - x)\int_0^1 h(1-t)dt$, $x \in \mathbb{R}$
Η F είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

$$F(0) = \int_0^1 h(1-t)dt = \int_0^1 h(x)dx$$

Θέσαμε $u = 1 - t.\ du = -dt.$

Επειδή, $h(0) = 1 > 0$ και από Δ2 έχουμε

$$h(x) \geq x.\ x \geq 0 \xRightarrow{=\mu\acute{o}\nu o\ \gamma\iota\alpha\ x=1} \int_0^1 h(x)dx > \int_0^1 xdx \Rightarrow \int_0^1 h(x)dx > \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 h(x)dx > \frac{1}{2} > 0$$

Άρα $F(0) > 0$.

$$F(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)dt$$

$$x^x \geq x.\ x > 0$$

$$\xRightarrow{=\mu\acute{o}\nu o\ \gamma\iota\alpha\ x=1} \int_1^2 g(x)dx > \int_1^2 xdx \Rightarrow \int_1^2 g(x)dx > \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \Rightarrow \int_0^1 h(x)dx > \frac{3}{2} \Rightarrow 3 - 2\int_1^2 g(x)dx < 0$$

Άρα $F(1) < 0$.

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano και η εξίσωση $F(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.