Κέντρο:
Μητροπόλεως 17 & Βενιζέλου
τ. 2310 221 041
kentro@vakalis.edu.gr

vakalis.frontistiria
www.vakalis.edu.gr

Ντεπώ:
Βασ. Όλγας 211 & Σοφούλη
τ. 2310 412 791
olgas@vakalis.edu.gr

Κ. Τούμπα-Χαριλάου:
Εμπορικό Κέντρο ΟΑΣΘ
Παπαναστασίου 90 & Κανάρη
τ. 2310 947 999
papa@vakalis.edu.gr

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ 135

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 51.

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ 23

Α4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Σωστό

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

Κέντρο:
Μητροπόλεως 17 & Βενιζέλου
τ. 2310 221 041
kentro@vakalis.edu.gr

vakalis.frontistiria
www.vakalis.edu.gr

— Ντεπώ:
Βασ. Όλγας 211 & Σοφούλη
τ. 2310 412 791
olgas@vakalis.edu.gr

— Κ. Τούμπα-Χαριλάου:
Εμπορικό Κέντρο ΟΑΣΘ
Παπαναστασίου 90 & Κανάρη
τ. 2310 947 999
papa@vakalis.edu.gr

ΘΕΜΑ Β

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ (1)

Β1) Στη σχέση (1) θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$, $u\in\mathbb{R}$.
Άρα η (1) γίνεται: $f(u)=u\cdot e^{1-u}$, $u\in\mathbb{R}$
Επομένως, $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$

Β2) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με
$f'(x)=e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}(1-x)'=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f'(x)=e^{1-x}\cdot(1-x)$, $x\in\mathbb{R}$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(1-x)=0 \overset{e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} 1-x=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=1$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

- $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$ και η f συνεχής στο 1
άρα η f γν. αύξουσα στο $(-\infty,1]$
- $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και η f συνεχής στο 1
άρα η f γν. φθίνουσα στο $[1,+\infty)$
- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το
$f(1)=1$

Β3) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f' είναι παραγωγίσιμη με
$f''(x)=e^{1-x}\cdot(1-x)'\cdot(1-x)+e^{1-x}\cdot(-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f''(x)=-e^{1-x}\cdot(1-x)-e^{1-x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f''(x)=e^{1-x}\cdot(-1+x-1) \Leftrightarrow f''(x)=e^{1-x}\cdot(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$

$$f(2) = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$$

• Οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη) στο $(-\infty, 2]$ και προς τα άνω (κυρτή) στο $[2, +\infty)$

• Επειδή η f'' μηδενίζεται στο 2 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A\left(2, \frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f

→ Η f είναι συνεχής $D_f = \mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

→ Για πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες ψάχνουμε στο $\pm\infty$.

• Στο $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x} \cdot e^{1-x}}{\cancel{x}} \underset{\substack{x \to -\infty \\ u \to +\infty}}{\overset{1-x=u}{=}} \lim_{u \to +\infty} e^{u} = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

• Στο $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x \cdot e^{1-x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{1-x}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα η ευθεία (ε): $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
Συνεπώς δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4) i) Έστω $A_1 = (-\infty, 1]$. Η f συνεχής στο A_1 και $f \nearrow A_1$, οπότε:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$$

διότι, • $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x \cdot e^{1-x}) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

καθώς $\lim_{x \to -\infty} e^{1-x} \underset{\substack{x \to -\infty \\ u \to +\infty}}{\overset{1-x=u}{=}} \lim_{u \to +\infty} e^{u} = +\infty$

• $f(1) = 1$.

Έστω $A_2 = (1, +\infty)$. Η f συνεχής στο A_2 και $f \searrow A_2$, οπότε:

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x)\right) = (0, 1)$$

διότι, • $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (ερ. B_3)

• $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1$ η f συνεχής στο 1.

Επομένως, $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$

ii) Από το σύνολο τιμών της f προκύπτει ότι:

• Αν $\lambda \in (-\infty, 0)$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία μοναδική ρίζα, καθώς $\lambda \in f(A_1)$ με $f \nearrow A_1$ ενώ $\lambda \notin f(A_2)$

• Αν $\lambda = 0$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$

• Αν $\lambda \in (0, 1)$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, καθώς $\lambda \in f(A_1)$ με $f \nearrow A_1$ και $\lambda \in f(A_2)$ με $f \searrow A_2$.

• Αν $\lambda = 1$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία μοναδική ρίζα, καθώς $\lambda \in f(A_1)$ με $f \nearrow A_1$ ενώ $\lambda \notin f(A_2)$

• Αν $\lambda \in (1, +\infty)$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει καμία ρίζα καθώς $\lambda \notin f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$

Κέντρο:
Μητροπόλεως 17 & Βενιζέλου
τ. 2310 221 041
kentro@vakalis.edu.gr

vakalis.frontistiria
www.vakalis.edu.gr

Ντεπώ:
Βασ. Όλγας 211 & Σοφούλη
τ. 2310 412 791
olgas@vakalis.edu.gr

Κ. Τούμπα-Χαριλάου:
Εμπορικό Κέντρο ΟΑΣΘ
Παπαναστασίου 90 & Κανάρη
τ. 2310 947 999
papa@vakalis.edu.gr

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} ax^3-3x^2-x+1, & x\le 0 \\ \text{συνx}, & 0<x\le \frac{3\pi}{2}\end{cases} \quad \text{με } a<-3$$

Γ1. Η f συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική
Η f συνεχής στο $(0,\frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^3-3x^2-x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\text{συνx}=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

$f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ άρα η f συνεχής στο 0

Άρα η f συνεχής στο $D_f=(-\infty,\frac{3\pi}{2}]$

Εξετάζω παραγωγισιμότητα στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3-3x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(ax^2-3x-1)}{\cancel{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{συνx}-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$ άρα η f όχι παραγωγίσιμη στο 0

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

Κέντρο:
Μητροπόλεως 17 & Βενιζέλου
τ. 2310 221 041
kentro@vakalis.edu.gr

vakalis.frontistiria
www.vakalis.edu.gr

— Ντεπώ:
Βασ. Όλγας 211 & Σοφούλη
τ. 2310 412 791
olgas@vakalis.edu.gr

— Κ. Τούμπα-Χαριλάου:
Εμπορικό Κέντρο ΟΑΣΘ
Παπαναστασίου 90 & Κανάρη
τ. 2310 947 999
papa@vakalis.edu.gr

Γ2. (i) f συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ αφού f συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\eta\mu x$

$f(0) = 1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$

$f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ άρα η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

(ii) Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$: $f'(x) = -\eta\mu x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

Όμως $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ άρα $0 < \kappa\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 0 < \kappa < \frac{3}{2} \\ \kappa \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \kappa = 1$.

Άρα $x = \pi$ η λύση της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

Άρα $\xi = \pi$ μοναδική λύση

Γ3. Έστω $x_0 < 0$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$, δηλ. $f'(x_0) = 0$.

Για $x < 0$: $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$.

Έστω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 - 6x - 1 = 0$

$\Delta = 36 + 12a = 12(3 + a) < 0$ αφού $a < -3$

άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη για $x < 0$

άρα δεν υπάρχει σημείο της C_f με αρνητική τετμημένη στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ4.

$$f(x)=\begin{cases} ax^3-3x^2-x+1, & x\leq 0 \\ συνx, & 0<x\leq \frac{3π}{2}\end{cases}$$

Για $x<0$: $f'(x)=3ax^2-6x-1$.

Έστω $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3ax^2-6x-1=0$ με $Δ=36+12a<0$ αφού $a<-3<0$

άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x<0$

Για $x\in\left(0,\frac{3π}{2}\right)$: $f'(x)=-ημx$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow ημx=0 \Leftrightarrow x=π$. $x\in\left(0,\frac{3π}{2}\right)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -ημx>0 \Leftrightarrow ημx<0 \Leftrightarrow π<x<\frac{3π}{2}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -ημx<0 \Leftrightarrow ημx>0 \Leftrightarrow x\in(0,π)$

x	$-\infty$	0	$π$	$\frac{3π}{2}$
$f'(x)$	$-$	$-$	0 $+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
			ελ.	

Η f συνεχής $(-\infty,π]$ με $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,π)$, f συνεχής στο 0 $\Rightarrow$ f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,π]$

Η f συνεχής $\left[π,\frac{3π}{2}\right]$ με $f'(x)>0$ στο $\left(π,\frac{3π}{2}\right)$ άρα η f γν. αύξουσα στο $\left[π,\frac{3π}{2}\right]$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=π$ το $f(π)=συνπ=-1$.

Άρα $f(x)\geq -1$ $\forall x\in\left(-\infty,\frac{3π}{2}\right]$

Θέμα Δ:

Δ1) $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$

Έστω $T(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

- Η T είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $\frac{1}{x}$

- $T(1) = -1 < 0$
  $T(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$ $\Big\}$ $T(1) \cdot T(e) < 0$

Η T ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano. Συνεπώς, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $T(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$.

- $T'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$ και η $T \uparrow (0, +\infty)$

άρα $T \uparrow (1, e) \subseteq (0, +\infty)$ και η T έχει το πολύ μία ρίζα στο $(1, e)$

Τελικά, η T έχει ακριβώς μία ρίζα $x_0 \in (1, e)$

Δ2) $f(x) = (\ln x_0)\cdot(x+1) - \ln x - 1 \quad , x>0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x) = \ln x_0 - \dfrac{1}{x} \;,\; x>0 \overset{\Delta 1}{=} \dfrac{1}{x_0} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-x_0}{x\cdot x_0}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x-x_0=0 \Leftrightarrow x=x_0$

$f'(x)>0 \overset{x\cdot x_0>0}{\Leftrightarrow} x-x_0>0 \Leftrightarrow x>x_0$
$f'(x)<0 \overset{x\cdot x_0>0}{\Leftrightarrow} x-x_0<0 \Leftrightarrow x<x_0$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	ελ.	↗	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0)=0$, διότι:

$f(x_0) = (\ln x_0)(x_0+1) - \ln x_0 - 1 =$
$= x_0\cdot \ln x_0 - 1 \overset{\Delta 1}{=} 0$

Δ3) $g(x) = x\cdot e^{-x} \;,\; x\in\mathbb{R}$ και $h(x) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1} \;,\; x\in\mathbb{R}$

$g(x)=h(x) \Leftrightarrow x\cdot e^{-x} = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$ (καθώς: $\left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1}>0$, άρα: $x\cdot e^{-x}>0 \Leftrightarrow x>0$)

$\Leftrightarrow \ln(x\cdot e^{-x}) = \ln\left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1)(\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - (x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)=0 \overset{\Delta 2}{\Leftrightarrow} x=x_0$.

καθώς η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο x_0, το $f(x_0)=0$

Συνεπώς $g(x_0)=h(x_0)$

Κέντρο:
Μητροπόλεως 17 & Βενιζέλου
τ. 2310 221 041
kentro@vakalis.edu.gr

vakalis.frontistiria
www.vakalis.edu.gr

Ντεπώ:
Βασ. Όλγας 211 & Σοφούλη
τ. 2310 412 791
olgas@vakalis.edu.gr

Κ. Τούμπα-Χαριλάου:
Εμπορικό Κέντρο ΟΑΣΘ
Παπαναστασίου 90 & Κανάρη
τ. 2310 947 999
papa@vakalis.edu.gr

Είναι: $g'(x) = e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(1-x)$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot (\ln x_0 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{\cancel{e^{x_0}}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{\cancel{e^{x_0}} \cdot e} \cdot (\ln x_0 - 1)$$

$$\overset{\Delta 1}{\Leftrightarrow} e(1-x_0) = x_0^{x_0+1} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow e(\cancel{1-x_0}) = x_0^{x_0} \cdot (\cancel{1-x_0})$$

$$\overset{x_0 \neq 1}{\Leftrightarrow} e = x_0^{x_0} \Leftrightarrow 1 = x_0 \cdot \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

που ισχύει από Δ1.
Καθώς, το x_0 είναι μοναδικό, οι C_g και C_h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

Κέντρο:
Μητροπόλεως 17 & Βενιζέλου
τ. 2310 221 041
kentro@vakalis.edu.gr

vakalis.frontistiria
www.vakalis.edu.gr

Ντεπώ:
Βασ. Όλγας 211 & Σοφούλη
τ. 2310 412 791
olgas@vakalis.edu.gr

Κ. Τούμπα-Χαριλάου:
Εμπορικό Κέντρο ΟΑΣΘ
Παπαναστασίου 90 & Κανάρη
τ. 2310 947 999
papa@vakalis.edu.gr

Δ4) $\phi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής, με $f(x)>\phi(x)$, για κάθε $x>0$.

$A(x, f(x))$ και $B(x, \phi(x))$, με $x>0$.

$(AB)=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-\phi(x))^2}=$
$=|f(x)-\phi(x)|=f(x)-\phi(x)$, $x>0$

Έστω, $d(x)=f(x)-\phi(x)$, $x>0$

Είναι, $d(x)\geq d(x_0)$, $x>0$
$\Leftrightarrow f(x)-\phi(x)\geq f(x_0)-\phi(x_0)$
$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)\geq \phi(x)-\phi(x_0)$ (1)

- Αν η ϕ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(1,e)$ τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της ϕ.

- Αν η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(1,e)$ τότε:

<u>Α' τρόπος</u>
- Η d παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0
- Το x_0 εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$
- Η d είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Σύμφωνα, με το Θ. Fermat: $d'(x_0)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f'(x_0)=\phi'(x_0) \overset{Δ2}{\Leftrightarrow} \phi'(x_0)=0$ κ το x_0

είναι κρίσιμο σημείο της ϕ.

Β' τρόπος

Είναι: $\phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$ (A)

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (B)

▸ Για $x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0$

$(1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$

$\xRightarrow{(A),(B)} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x \to x_0^+} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$

$\Rightarrow f'(x_0) \geq \phi'(x_0)$

$\xRightarrow{\Delta\Sigma} 0 \geq \phi'(x_0)$ (2)

▸ Για $x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$

$(1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$

$\xRightarrow{(A),(B)} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \to x_0^-} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$

$\Rightarrow f'(x_0) \leq \phi'(x_0)$

$\xRightarrow{\Delta\Sigma} 0 \leq \phi'(x_0)$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε $\phi'(x_0) = 0$ ή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της ϕ.