



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23

A4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

B1. Στη σχέση (1) θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1, u \in \mathbb{R}$.

Άρα η (1) γίνεται: $f(u) = u \cdot e^{1-u}, u \in \mathbb{R}$.

Επομένως, $f(x) = x \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$

B2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με :

$$f'(x) = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} (1-x)' = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x} (1-x), x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} (1-x) = 0 \Leftrightarrow \overset{e^{1-x} > 0}{1-x} = 0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f		Μέγιστο	

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ και η f συνεχής στο 1, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.



$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και η f συνεχής στο 1, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 1$.

B3. Κυρτότητα – Σημεία καμπής :

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f' παραγωγίσιμη με : $f''(x) = e^{1-x}(1-x)'(1-x) + e^{1-x}(-1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f''(x) = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} \Leftrightarrow f''(x) = e^{1-x}(-1+x-1) \Leftrightarrow f''(x) = e^{1-x}(x-2)$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f		Σ.Κ.	

Οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη) στο $(-\infty, 2]$ και προς τα άνω (κυρτή) στο $[2, +\infty)$. Επειδή η f'' μηδενίζεται στο 2 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, το σημείο

$A(2, f(2))$ ή $A\left(2, \frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Ασύμπτωτες :

- Η f είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Για πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες ψάχνουμε στο $\pm\infty$
 Στο $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty,$$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Στο $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon) : y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Συνεπώς δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4. i) Έστω $A_1 = (-\infty, 1]$. Η f είναι συνεχής στο A_1 και $f \uparrow A_1$, οπότε:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$$

διότι, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1-x}) = -\infty$ καθώς $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty$

και $f(1) = 1$

Έστω $A_2 = (1, +\infty)$. Η f είναι συνεχής στο A_2 και $f \downarrow A_2$, οπότε:

$$f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (0, 1)$$

διότι, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (υπολογισμένο στο ερώτημα Β3)

και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$ καθώς η f είναι συνεχής στο 1.

Επομένως, $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$.

ii) Από το Σύνολο Τιμών της f προκύπτει ότι :

- Αν $\lambda \in (-\infty, 0)$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία μοναδική ρίζα, καθώς $\lambda \in f(A_1)$ με $f \uparrow A_1$ ενώ $\lambda \notin f(A_2)$.
- Αν $\lambda = 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει μία μοναδική ρίζα, την $x = 0$.
- Αν $\lambda \in (0, 1)$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, καθώς $\lambda \in f(A_1)$ με $f \uparrow A_1$ και $\lambda \in f(A_2)$ με $f \downarrow A_2$.
- Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = 1$ έχει μία μοναδική ρίζα, την $x = 1$, καθώς η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 1$, δηλαδή $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το « \Rightarrow » ισχύει μόνο για $x = 1$.
- Αν $\lambda \in (1, +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει καμία ρίζα, καθώς $\lambda \notin f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{με } \alpha < -3$$

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική

Η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \left\{ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \right. \\ \left. \text{άρα } f \text{ συνεχής στο } 0 \right.$$

Άρα η f συνεχής στο $D_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

Εξετάζω παραγωγισιμότητα στο 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot (\alpha x^2 - 3x - 1)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \text{άρα η } f \text{ όχι παραγωγίσιμη στο } 0$$

Γ2.

i. f συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ αφού f συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\eta\mu x$

$$f(0) = 1 \text{ και } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

άρα η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

ii. Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$: $f'(x) = -\eta\mu x$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\text{Όμως } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ άρα } 0 < \kappa\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa < \frac{3}{2} \left. \vphantom{0 < \kappa < \frac{3}{2}} \right\} \Rightarrow \kappa = 1$$

$$\kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα $x = \pi$ η λύση της εξίσωσης $f'(x) = 0$

Άρα $\xi = \pi$ μοναδική λύση.

Γ3. Έστω $x_0 < 0$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$

να είναι παράλληλη στον $x'x$, δηλ $f'(x_0) = 0$

$$\text{Για } x < 0 : f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$$

$$\text{Έστω } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 - 6x - 1 = 0, \Delta = 36 + 12a = 12(3 + a) < 0 \text{ αφού } a < -3$$

άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη για $x < 0$

άρα δεν υπάρχει σημείο της C_f με αρνητική τετμημένη

στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον $x'x$

$$\text{Γ4. } f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{με } \alpha < -3$$

Για $x < 0$: $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$

Έστω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2 - 6x - 1 = 0$, $\Delta = 36 + 12\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$ αφού $\alpha < -3$

άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$: $f'(x) = -\eta\mu x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x < 0 \Leftrightarrow \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x < 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \pi$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
f'	-	-	0	+
f	↘		↗	

- η f συνεχής $(-\infty, \pi]$ με $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, \pi)$

f συνεχής στο 0

άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \pi]$

- η f συνεχής $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ με $f'(x) > 0$ στο $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \pi$ το $f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$

άρα $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \quad \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Έστω : } T(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Η T είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $\frac{1}{x}$

$$T(1) = -1 < 0$$

$$T(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$$

$$\text{άρα } T(1) \cdot T(e) < 0$$

Οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε :

$$T(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

$$T'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

και η T είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα η T είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e) \subseteq (0, +\infty)$ άρα η T έχει το πολύ μια ρίζα στο $(1, e)$

Τελικά η $T(x)$ έχει μια ακριβώς ρίζα $x_0 \in (1, e)$

Δ2.

$$f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1 \quad x > 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με :

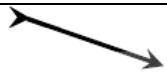
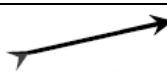
$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} \quad x > 0$$

$$\stackrel{\Delta 1}{=} \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x \cdot x_0}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x \cdot x_0} = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

$$f'(x) > 0 \stackrel{x \cdot x_0 > 0}{\Leftrightarrow} x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0$$

$$f'(x) < 0 \stackrel{x \cdot x_0 > 0}{\Leftrightarrow} x - x_0 < 0 \Leftrightarrow x < x_0$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f		Ελάχιστο	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το

$$f(x_0) = 0 \text{ διότι } f(x_0) = (\ln x_0)(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = x_0 \cdot \ln x_0 - 1 \stackrel{\Delta.1}{=} 0$$

Δ3. $g(x) = x \cdot e^{-x} \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \quad x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \text{ καθώς } \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} > 0, \text{ άρα : } x \cdot e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x > 0, \text{ έτσι έχουμε :}$$

$$\ln(x \cdot e^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1) \cdot (\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow \ln x - x = (x+1) \cdot \ln x_0 - (x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln x_0) \cdot (x+1) - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \stackrel{\Delta.2}{\Leftrightarrow} x = x_0$$

Καθώς η f παρουσιάζει ελάχιστο, μόνο στο x_0 το $f(x_0) = 0$

Συνεπώς : $g(x_0) = h(x_0)$

Είναι : $g'(x) = e^{-x} + x e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} (1-x)$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0} (1-x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0} \cdot e} (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{\Delta.1}{\Leftrightarrow} e \cdot (1-x_0) = x_0^{x_0+1} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow e \cdot (1-x_0) = x_0^{x_0} \cdot (1-x_0) \stackrel{x_0 \neq 1}{\Leftrightarrow} e = x_0^{x_0} \Leftrightarrow 1 = x_0 \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

Που ισχύει από Δ1. Καθώς το x_0 είναι μοναδικό, οι

C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Έστω $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε $x > 0$

$A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$, $x > 0$

$$(AB) = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x) - \varphi(x))^2} = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x), \quad x > 0$$

Έστω $d(x) = f(x) - \varphi(x)$, $x > 0$

Είναι $d(x) \geq d(x_0)$ $x > 0$

$$\Leftrightarrow f(x) - \varphi(x) \geq f(x_0) - \varphi(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \varphi(x) - \varphi(x_0) \quad (1)$$

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (1, e)$ τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .
- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (1, e)$ τότε :

Α' τρόπος

Η d παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0

Το x_0 εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$

Η d είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat :

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \stackrel{\Delta.2}{\Leftrightarrow} \varphi'(x_0) = 0$$

και το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

Β' τρόπος

Είναι :

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \quad (A)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (B)$$

Για :

$$x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$\stackrel{(A),(B)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \geq \varphi'(x_0) \Rightarrow$$

$$\stackrel{\Delta.2}{\Rightarrow} 0 \geq \varphi'(x_0) \quad (2)$$

Για :

$$x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$\stackrel{(A),(B)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \leq \varphi'(x_0) \Rightarrow$$

$$\stackrel{\Delta 2}{\Rightarrow} 0 \leq \varphi'(x_0) \quad (3)$$

Από (2) και (3) $\varphi'(x_0) = 0$ και το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ