ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 186

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142-143

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 161

Α4.
α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$
$g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}$

Β1. Για να ορίζεται η συνάρτηση $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ πρέπει:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[0,1]$$

Οπότε, $D_h=[0,1]$

και $h(x)=f(g(x))=\left(\sqrt{x}^2-1\right)^2=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$.

B2. $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$

- Έστω $x_1,x_2\in D_h=[0,1]$, με

$$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2\Rightarrow |x_1-1|=|x_2-1| \underset{\substack{x_1-1\le 0\\ x_2-1\le 0}}{\overset{x_1,x_2\in D_h=[0,1]}{\Rightarrow}} -x_1+1=-x_2+1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα η συνάρτηση h είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

- Για κάθε $x\in[0,1]$ θέτω $h(x)=y\Leftrightarrow (x-1)^2=y \underset{x-1\le 0}{\overset{y\ge 0}{\Leftrightarrow}} -x+1=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y},\ y\ge 0$.

Όμως, $x\in[0,1]$ άρα πρέπει:

$$1-\sqrt{y}\in[0,1]\Leftrightarrow 0\le 1-\sqrt{y}\le 1\Leftrightarrow \begin{cases}1-\sqrt{y}\ge 0\\ 1-\sqrt{y}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{y}\le 1\\ \sqrt{y}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow y\in[0,1].$$

Επομένως, $h(x)=y\Leftrightarrow h^{-1}(y)=x\Leftrightarrow h^{-1}(y)=1-\sqrt{y},\ y\in[0,1]$.

Οπότε, $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x},\ x\in[0,1]$

<u>2ος τρόπος:</u>

$h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$. Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=2(x-1)<0$, για $x\in[0,1)$ και $h'(1)=0$. Η h είναι συνεχής στο 1 άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Οπότε, εφόσον h συνεχής στο $[0,1]$ και h γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ έχουμε:

$h([0,1])=[h(1),h(0)]=[0,1]=D_{h^{-1}}$

B3. $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$, $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}\Leftrightarrow \varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$

i. Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0=1$: $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

και $\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$, δηλαδή η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Οπότε :

- Η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $\varphi(0)=1$

  $\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$ δηλαδή $\varphi(0)\ne\varphi(1)$

Επομένως για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii. Για κάθε $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2} \overset{\eta\mu x\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} \eta\mu\dfrac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1\Leftrightarrow \varphi(1)<\eta\mu\alpha<\varphi(0)$

Οπότε, εφόσον η φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

<u>2ος τρόπος:</u>

Θεωρούμε συνάρτηση $\kappa(x)=\varphi(x)-\eta\mu\alpha, x\in[0,1]$ και εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & , x<-1\\ 3x^2-1 & , x>-1\end{cases}$$

Για $x<-1$: $f'(x)=-2=(-2x)'$

Σύμφωνα με Συνέπειες ΘΜΤ. $f(x)=-2x+c_1$ για $c_1\in\mathbb{R}$

Για $x>-1$: $f'(x)=3x^2-1=(x^3-x)'$

Σύμφωνα με Συνέπειες ΘΜΤ. $f(x)=x^3-x+c_2$ για $c_2\in\mathbb{R}$

$f(0)=0\Leftrightarrow c_2=0$, Άρα $f(x)=x^3-x$, για $x>-1$

$$\text{Άρα } f(x)=\begin{cases}-2x+c_1 & , x<-1\\ c_3, & x=-1\\ x^3-x & , x>-1\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα συνεχής και στο -1:

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow 2+c_1=0=c_3$

Άρα $c_1=-2$ και $c_3=0$ οπότε $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & , x\le -1\\ x^3-x & , x>-1\end{cases}$

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ είναι η

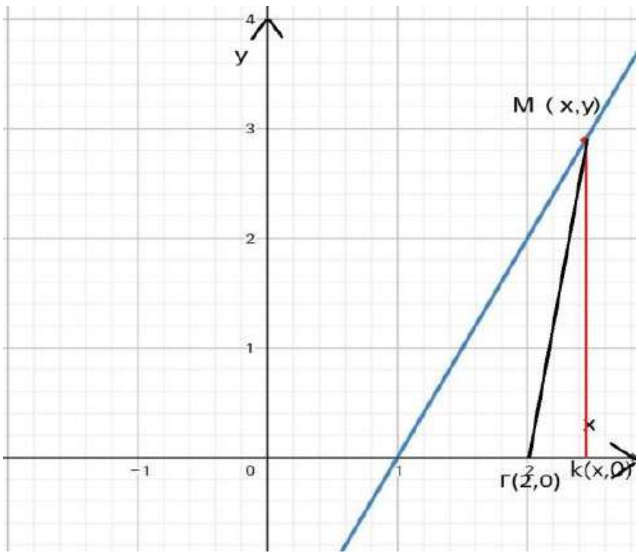
$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ με $x_0>-1$

Η (ε) τέμνει τον y΄y στο -2 άρα το σημείο $B(0,-2)\in\varepsilon\Leftrightarrow -2-f(x_0)=f'(x_0)(-x_0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(-x_0)\Leftrightarrow -2-x_0^3+x_0=-3x_0^3+x_0\Leftrightarrow x_0^3=1\Leftrightarrow x_0=1$

Άρα η εξίσωση της (ε): $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=2x-2$

Γ3. $\varepsilon: y=2x-2$, με $x>2$



$$E=\frac{1}{2}(MK)(K\Gamma)=\frac{1}{2}|y|\cdot|x-2|=$$

$$=\frac{1}{2}|2x-2|\cdot|x-2|\overset{x>2}{=}\frac{1}{2}(2x-2)(x-2)=(x-1)(x-2)$$

Άρα $E(t)=(x(t)-1)(x(t)-2)$

Παραγωγίζω τη σχέση :

$$E'(t)=x'(t)(x(t)-2)+x'(t)(x(t)-1)$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$

$$x'(t_0) = 2 \,{}^{μον}\!/\!_{δευτ} \qquad \text{και} \qquad x(t_0) = 3$$

οπότε $E'(t_0) = 2(3-2) + (3-1)2 = 2 + 4 = 6$ τετρ.μον./δευτ

Γ4. $$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{ημf(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 1$$

διότι:

- για το 1^{ο} όριο :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ημf(x)}{f(x)}$, θέτω $\dfrac{1}{f(x)} = ω$ και $f(x) = -2x - 2$ με $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x-2) = +\infty$

άρα όταν $x \to -\infty$, το $ω \to 0$

οπότε $$\lim_{x \to -\infty} \frac{ημf(x)}{f(x)} = \lim_{ω \to 0} ω \cdot ημ\left(\frac{1}{ω}\right) = 0$$

<u>2^{ος} τρόπος:</u>

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{ημ f(x)}{f(x)} = 0$$

διότι:

$$\left| \frac{ημ f(x)}{f(x)} \right| \le \left| \frac{1}{f(x)} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{f(x)} \right| \le \frac{ημ f(x)}{f(x)} \le \left| \frac{1}{f(x)} \right|$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x-2) = \lim_{x \to -\infty} (-2x) + \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\left| \dfrac{1}{f(x)} \right| \right) = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to -\infty} \left| \dfrac{1}{f(x)} \right| = 0 \end{array} \right\} \text{από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι : } \lim_{x \to -\infty} \frac{ημ f(x)}{f(x)} = 0$$

- για το 2^{ο} όριο :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u \to +\infty} \frac{u^3 - u}{1+u^3} = \lim_{u \to +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1$$

καθώς θέτω $-x = u$, όταν $x \to -\infty$ το $u \to +\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) $f(x) = x - \ln(3x)$, $x > 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{3x} = \frac{x-1}{x}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ (αφού e<3 άρα lne<ln3 οπότε 1<ln3)
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$, αφού x>0
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

X		0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
f		$\searrow$	Ελαχ.	$\nearrow$

Έστω $A_1=(0,1]$ και $A_2=(1,+\infty)$.

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_1 άρα $f(A_1)=[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x))$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \ln(3x)\right) \overset{u=3x}{\underset{x\to 0^+, u\to 0^+}{=\!=\!=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{u}{3} - \ln u\right) = 0 - (-\infty) = +\infty$, οπότε $f(A_1)=[1-\ln3,+\infty)$.

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A_2 άρα $f(A_2)= \left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right)\right] = +\infty(1-0) = +\infty$ διότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{3x}}{1} = 0$ οπότε
$f(A_2)=(1-\ln3,+\infty)$.

Το $0 \in f(A_1)$ και αφού f γνησίως φθίνουσα στο A_1 υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.
Το $0 \in f(A_2)$ και αφού f γνησίως αύξουσα στο A_2 υπάρχει μοναδικό $x_2 \in A_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$.
Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (αφού $f(1) \neq 0$, $x_1<1$).

ii)
$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2.
$x_1 \le x \le 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) \ge f(x) \ge 1 - \ln3$, άρα $f(x) \le 0$,
$1 \le x \le x_2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 1 - \ln3 \le f(x) \le f(x_2)$, άρα $f(x) \le 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και
η f(x)≤0 στο $[x_1, x_2]$, καθώς $f(x) = 0 \overset{Δ1.}{\Leftrightarrow} x = x_1$ ή $x = x_2$

$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln(3x) - x)\,dx =$

$= \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln(3x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} x\,dx = [x\ln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x\frac{3}{3x}dx - \left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{x_1}^{x_2} =$

$=(x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1)) - \int_{x_1}^{x_2} 1\,dx - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}$

Επειδή από Δ1 $f(x_1)=0=f(x_2)$ έχουμε $\ln(3x_1) = x_1, \ln(3x_2) = x_2$
και $\int_{x_1}^{x_2} 1\,dx = [x]_{x_1}^{x_2} = x_2 - x_1$ παίρνουμε:

E$=x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}=$
$=(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)=$
$=(x_2 - x_1)\left[(x_2 + x_1) - 1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_1)\right]=$
$= (x_2 - x_1)\left[\frac{1}{2}(x_2 + x_1) - 1\right] =$
$=\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$ τ.μ.

<u>2ος τρόπος:</u>

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx = \int_{x_1}^{x_2} -f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} -(x)'f(x)dx = -[xf(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} xf'(x)dx = 0 + \int_{x_1}^{x_2} x(1-\frac{1}{x})dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x_1}^{x_2} = ...$$

Δ3.
Από Δ1 έχουμε $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$
Από Δ2 και επειδή E>0$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$ συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε $1 < 2 - x_1 < x_2$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$
Έχουμε : $f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$.

Δ4. $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow \left(f(x) - f'(x_2)(x - x_2)\right) + \left(f(x) - f(1)\right) = 0$ (1)

Η εφαπτομένη ε της C_f στο $A(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση :

ε: $y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$

Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ με το "=" μόνο για $x = x_2$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x=1, άρα $f(x) \geq f(1)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, με το "=" μόνο για x=1.

Η (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f'(x_2)(x - x_2) \\ \text{και} \\ f(x) - f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \\ \text{και} \\ x = 1 \end{cases}$. Συνεπώς η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο $(0, +\infty)$.