



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΘΕΜΑ Α

A1. (σελίδα 111 σχολικό βιβλίο)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \blacksquare$$

A2. (σελίδα 104 σχολικό βιβλίο)

— Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

A3. (σελίδα 128-129 σχολικό βιβλίο)

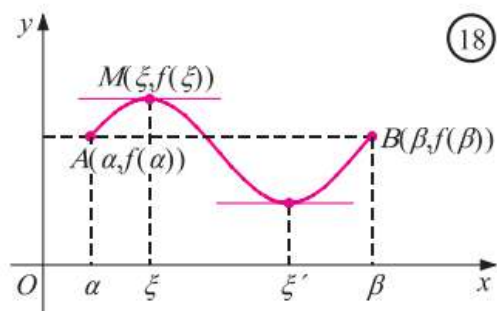
ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:
 $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



A4.

- α) Λάθος
- β) Λάθος
- γ) Λάθος
- δ) Σωστό
- ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$D_g = \mathfrak{R}$$

$$D_h = (0, +\infty)$$

$$D_f = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x \in \mathfrak{R} \end{array} \right\} = (0, +\infty)$$

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$$

B2.

$$i) f'(x) = \frac{(4 - x^2)'x - (4 - x^2)(x)'}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = -\frac{x^2 + 4}{x^2} < 0$$

για κάθε $x > 0$ και η f είναι συνεχής, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

$$ii) \pi > e \xrightarrow{f \downarrow} f(\pi) < f(e) \Rightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \xrightarrow{\frac{\pi}{4 - e^2} < 0} \Rightarrow \frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$$

B3. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως ρητή.

Κατακόρυφες ασύμπτωτες :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(4-x^2) \frac{1}{x} \right] \stackrel{4(+\infty)}{=} +\infty$$

διότι : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4-x^2) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): x=0$ (ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Πλάγιες/οριζόντιες ασύμπτωτες :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

B4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0 \quad (1)$$

για $x > 0$ είναι $\left| \frac{1}{f(x)} \right| > 0$ και επομένως από την ανισότητα :

$$\left| \sigma\upsilon\nu(1+x^2) \right| \leq 1 \text{ έχουμε ισοδύναμα ότι :}$$

$$\left| \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) και κριτήριο παρεμβολής έχουμε το ζητούμενο όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0 .$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + \alpha, & x \geq 1 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Γ1. Γνωρίζουμε ότι $\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x} + \alpha\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1 + \alpha x)dx = 1 \Leftrightarrow \left[x + \alpha \frac{x^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3 + \alpha \frac{9}{2} - 2 - \alpha \frac{4}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Οπότε, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Γ2. i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x-1)} = -1$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, με $f'(1) = -1$. Άρα ορίζεται η εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

ii) Η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι:

$$(\epsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η (ϵ) με τον άξονα $x'x$, με $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, για την

$$\text{οποία ισχύει } \epsilon \varphi \omega = f'(1) \Leftrightarrow \epsilon \varphi \omega = -1 \Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}.$$

Γ3. Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική
- Η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως ρητή
- Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ως παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Οπότε, η f είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$.

Για $x < 1$: $f'(x) = 2x - 3$

έχουμε $x < 1 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow 2x - 3 < -1 \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Για $x > 1$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Δηλαδή, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε η f είναι “1-1” στο \mathbb{R} .

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο \mathbb{R} , άρα $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

διότι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty .$$

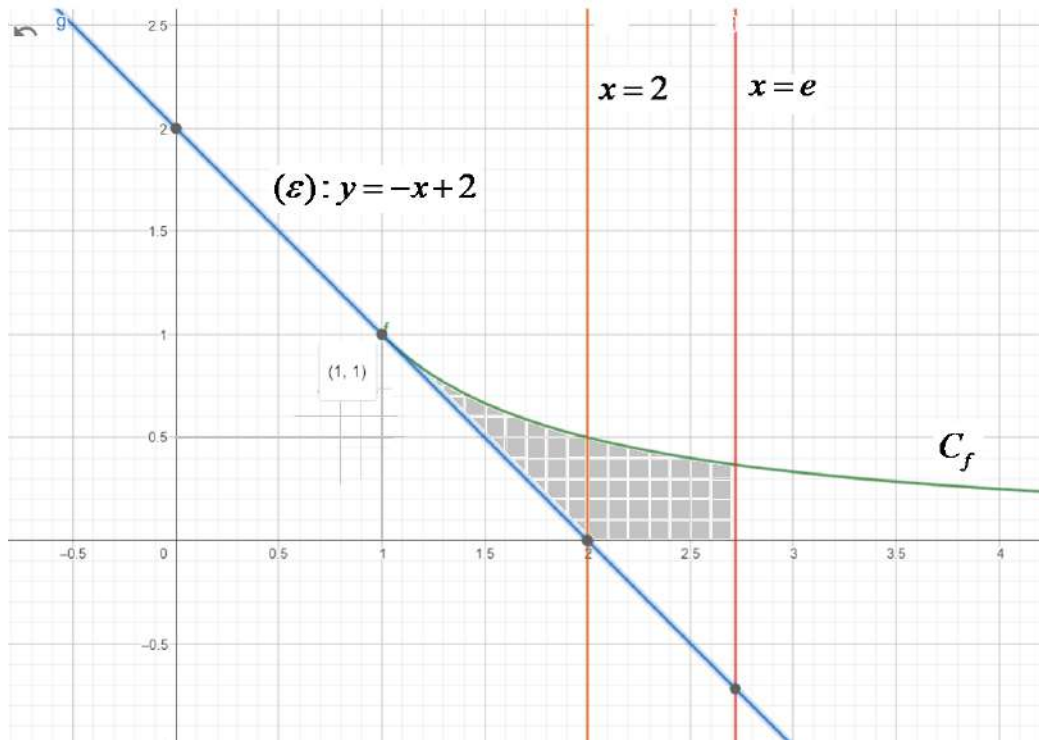
Γ4. Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από :

C_f , $(\varepsilon): y = -x + 2$, άξονα x' και την ευθεία $x = e$.

Για $x \geq 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $(\varepsilon): y = -x + 2 = g(x)$

Για $x = 0$: $y = 2$

Για $y = 0$: $x = 2$



Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[1, e]$, άρα η $f - g$ είναι συνεχής στο $[1, e]$.

Έχουμε $(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$ καθώς η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$ άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη, για κάθε $x \in [1, +\infty)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή το $x_0 = 1$. Επομένως $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και το "=" ισχύει μόνο για

$$x = 1. \text{ Οπότε : } E(\Omega) = \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx + \int_2^e f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + [\ln x]_2^e = \ln 2 + \frac{4}{2} - 4 - \ln 1 - \frac{1}{2} + 2 + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x - 1}$, $x \neq 1$ με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$f(x) = (x - 1)g(x) + 2x$, ΚΟΝΤΆ ΣΤΟ 1,

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x - 1)g(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 0 \cdot \ell + 2$ (1)

όμως $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln(2 - x) - \frac{1}{x} + k \right) = \ln 1 - 1 + k = -1 + k$ (2)

ΑΠΌ (1) και (2) : $-1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 3$

Δ2. Η $f(x) = \ln(2 - x) - \frac{1}{x} + 3$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με : $f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 2 - x}{(2-x) \cdot x^2} = \frac{-x^2 - x + 2}{(2-x) \cdot x^2} = \frac{x^2 + x - 2}{(x-2) \cdot x^2} = \frac{x+2}{(x-2) \cdot x^2} \cdot (x-1)$

Για $x \in (0, 2)$ είναι $\frac{x+2}{(x-2) \cdot x^2} < 0$

Η f είναι συνεχής στο $(0, 2)$ και

- $f'(x) > 0$ για $x \in (0, 1)$
 άρα f γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$

- $f'(x) < 0$ για $x \in (1, 2)$
 άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2)$

- $D_1 = (0, 1]$
 f συνεχής και ↗ $\Rightarrow f(D_1) = (\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(1))$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(2 - x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty$ καθώς $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(2 - x) + 3) = \ln 2 + 3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$

$f(1) = 2$

Άρα $f(D_1) = (-\infty, 2]$

$0 \in f(D_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in D_1 = (0, 1]$ ώστε $f(x_1) = 0$, $x_1 \neq 1$ καθώς $f(1) = 2$

f γνησίως αύξουσα στο $D_1 = (0, 1]$ άρα x_1 μοναδικό.

- $D_2 = (1, 2)$
 f συνεχής και ↘ $\Rightarrow f(D_2) = (\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)) = (-\infty, 2)$

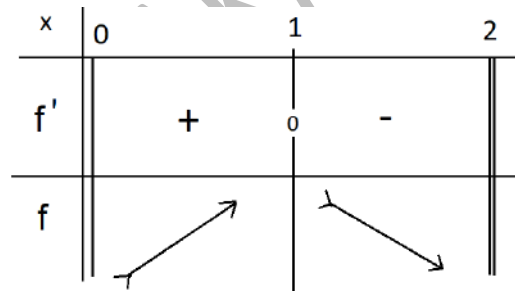
$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\ln(2 - x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty$

καθώς $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(2 - x) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$, διότι θέτω $u = 2 - x$ όταν $x \rightarrow 2^-$ το $u \rightarrow 0^+$

$0 \in f(D_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in D_2 = (1, 2)$ ώστε $f(x_2) = 0$

f γνησίως αύξουσα στο $D_2 = (1, 2)$ άρα x_2 μοναδικό.



Για να δείξω ότι $x_1 < \frac{1}{3}$

$$0 < x_1 < \frac{1}{3} \stackrel{f \nearrow_{x \in (0,1)}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 \Leftrightarrow 0 < \ln \frac{5}{3} - 3 + 3 \Leftrightarrow 0 < \ln \frac{5}{3} \text{ που ισχύει}$$

καθώς $\frac{5}{3} > 1$

Δ3. Ζητάμε $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

- η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ καθώς εκφράζεται από συνεχείς συναρτήσεις
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ καθώς εκφράζεται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \stackrel{f(x_1)=0}{=} \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Επίσης $f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$, άρα $f' \searrow (0,2)$, επομένως το ξ είναι μοναδικό.

Δ4.

i. Εφόσον οι F και G είναι αρχικές της f στο $(0,2)$ ισχύει : $F(x) = G(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

$$\text{για } x = x_1, \quad F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow G(x_1) = -c$$

$$\text{για } x = x_2, \quad F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow F(x_2) = c$$

$$\text{άρα } G(x_1) = -F(x_2) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$

ii. Θεωρούμε $H(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x$, $x \in (0,2)$.

- Η H είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, καθώς οι F και G είναι συνεχείς ως παραγωγίσιμες

- $H(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2$,
έχουμε :

$$F(x_2) + G(x_1) = 0 \Leftrightarrow F(x_2) = -G(x_1)$$

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2) \text{ καθώς :}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x \leq 1 \Rightarrow \overset{f \nearrow}{f(x_1)} < f(x) \Rightarrow 0 < f(x) \\ 1 < x < x_2 \Rightarrow \overset{f \searrow}{f(x)} > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0 \end{array} \right\} \text{ άρα } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2)$$

η F είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, άρα

$F \nearrow [x_1, x_2]$, έτσι :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \overset{F \nearrow}{F(x_1)} < F(x_2) \Leftrightarrow 0 < F(x_2) \overset{F(x_2)=-G(x_1)}{\Leftrightarrow} 0 < -G(x_1) \Leftrightarrow G(x_1) < 0 \overset{x_2 > 0}{\Leftrightarrow} x_2 G(x_1) < 0 \text{ και} \\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$$

Τελικά : $H(x_1) = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$

- $H(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1$,
καθώς :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \overset{F \nearrow}{F(x_1)} < F(x_2) \Leftrightarrow 0 < F(x_2) \overset{x_1 > 0}{\Leftrightarrow} x_1 F(x_2) > 0$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$$

Τελικά : $H(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$

Άρα $H(x_1) \cdot H(x_2) < 0$ οπότε σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $H(x_0) = 0$.

Επιπλέον : $H'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

οπότε $H \nearrow (x_1, x_2)$ άρα x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $H(x) = 0$ στο (x_1, x_2) .

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ