ΒΑΚΑΛΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
από το 1967

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2024

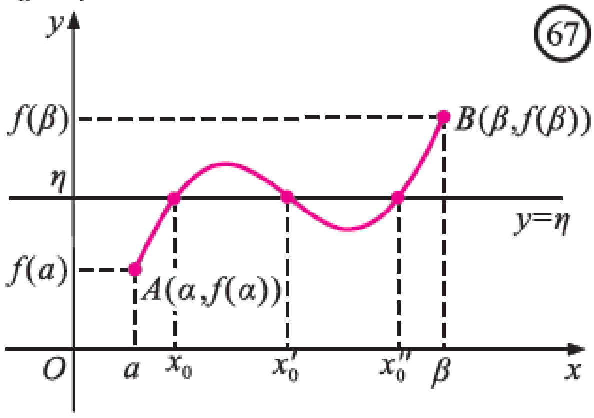
ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

αφού
$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και
$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 155

Έστω μία συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα Δ και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του Δ.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 216

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Α4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_f = D_g \cap D_h - \{x / h(x) = 0\}$

$D_g = [1,+\infty) \quad , \quad D_h = [1,+\infty)$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$Ά\rho\alpha \;\; D_f = (1,+\infty)$

$$\text{Οπότε} \;\; f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\sqrt{x}^2 + 1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}^2 - 1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}^2 + 1}{\sqrt{x}^2 - 1} = \frac{x+1}{x-1} \;,\; x > 1$$

$D_r = D_g \cap D_h = [1,+\infty)$

$$Ά\rho\alpha \;\; r(x) = g(x)\cdot h(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\cdot(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) = x - \frac{1}{x} \;,\; x \ge 1$$

B2. Η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως ρητή, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \; x > 1$

<u>**1ος τρόπος**</u>

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ ισχύει:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow (x_2-1)\cdot(x_1+1) = (x_2+1)\cdot(x_1-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2x_1 + x_2 - x_1 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Rightarrow 2x_2 = 2x_1 \Rightarrow x_2 = x_1$$

Άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται

<u>**2ος τρόπος**</u>

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως ρητή άρα: $f'(x) = \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$, οπότε και 1-1, άρα αντιστρέφεται

Θέτω:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow yx - y = x+1 \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \Leftrightarrow$$

$$\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1} \;,\;\; \alpha\varphi o\acute{\upsilon} \;\; x > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} y > 1$$

Άρα $\;\; D_f = D_{f^{-1}} = (1,+\infty) \;\;\; \kappa\alpha\iota \;\;\; f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = f(x)$

Β3.

- Η $r(x)=x-\frac{1}{x}$ $\acute{\varepsilon}\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\ o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\ \tau\eta\varsigma$ $D_r=[1,+\infty)$

  Άρα η C_r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\lambda$$

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0=\beta$$

  Άρα η C_r έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=1\ \kappa\alpha\iota\ \beta=0$ δηλαδή την ευθεία $y=x$.

Β4. Η δοσμένη εξίσωση ορίζεται για : $x\in D_f=(1,+\infty)$, $f(x)\in D_{f^{-1}}=(1,+\infty)\Rightarrow f(x)>1$ που ισχύει για κάθε $x>1$ και $x\in D_r=[1,+\infty)$. Τελικά ορίζεται για $x\in(1,+\infty)$.

Έτσι έχουμε :

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4r(x)\Leftrightarrow x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x^2=1+4x-4\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)(x-4)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=4, & \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\\ x=1, & \text{Α}\pi o\rho.\quad \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \ x>1\\ x=-1, & \text{Α}\pi o\rho.\end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής, με $f(x)=\begin{cases}-2x+4+e^{\lambda}, & 0\le x<2\\ -x^2+4x-3+\lambda, & x\ge 2\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Γ1. $D_f=[0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2)$ ως πολυωνυμική και στο $(2,+\infty)$ ως πολυωνυμική, επίσης. Εφόσον f συνεχής στο D_f θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=2$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$. (1)

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-2x+4+e^{\lambda})=-4+4+e^{\lambda}=e^{\lambda}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3+\lambda)=-4+8-3+\lambda=\lambda+1$
- $f(2)=\lambda+1$

Οπότε $(1)\Leftrightarrow e^{\lambda}=\lambda+1\Leftrightarrow \lambda=0$.

Καθώς γνωρίζουμε ότι $e^x\ge x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Γ2. Για $\lambda=0$ έχουμε, $f(x)=\begin{cases}-2x+5, & 0\le x<2\\ -x^2+4x-3, & x\ge 2\end{cases}$

Για $x\in(0,2)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2<0$.

Για $x\in(2,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2x+4<0$, για κάθε $x\in(2,+\infty)$, καθώς για $x>2\Leftrightarrow -2x<-4\Leftrightarrow -2x+4<0$.

Εφόσον $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ και f συνεχής στο $[0,+\infty)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$, παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στο $x_1=0$, το $f(0)=5$ και δεν παρουσιάζει ελάχιστο.

Γ3. i) Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$, εφόσον f συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και στο $(2,3)$, θα ελέγξουμε αν είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=2$

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x+5-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2(x-2)}{x-2}=-2$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(x-2)^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}[-(x-2)]=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, συνεπώς ούτε στο $(0,3)$. Επομένως, η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0,3]$.

ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,f(0))$ και $\mathrm{E}(3,f(3))$ είναι $\lambda_{\Delta\mathrm{E}}=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{0-5}{3}=-\dfrac{5}{3}$.

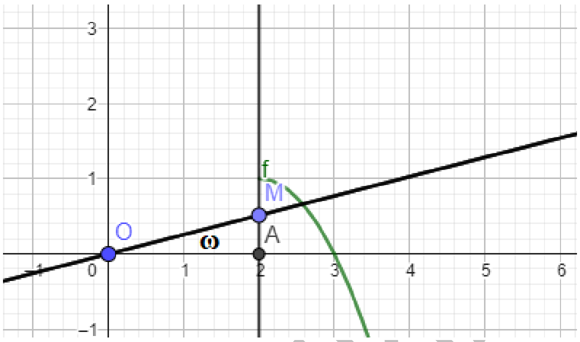
Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ και εφόσον (ε) παράλληλη στην ευθεία $(\Delta\mathrm{E})$, τότε $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\Delta\mathrm{E}} \Leftrightarrow f'(\xi) = -\dfrac{5}{3}$. (2)

Για $x \in (0,2)$: $(2) \Leftrightarrow -2 = -\dfrac{5}{3}$, αδύνατη.

Για $x \in (2,3)$: $(2) \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -6\xi + 12 = -5 \Leftrightarrow 6\xi = 17 \Leftrightarrow \xi = \dfrac{17}{6}$, δεκτή καθώς $\dfrac{17}{6} \in (2,3)$.

Γ4. Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ σημείο που κινείται κατακόρυφα πάνω στην ευθεία $x=2$, ξεκινώντας από το σημείο $\mathrm{A}(2,0)$ με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_y = 0,5 \Leftrightarrow y'(t) = 0,5$ μον. μήκους/ sec.

Τη χρονική στιγμή που το M θα συναντήσει τη C_f έχουμε: $x(t_0) = 2$, $y(t_0) = f(2) = 1$ και $y'(t_0) = 0,5$.



Έχουμε, $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{y}{2}$. Τη χρονική στιγμή t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, άρα $\varepsilon\varphi\omega(t) = \dfrac{y(t)}{2}$

Οπότε, $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \dfrac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \left(1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)\right) \cdot \omega'(t) = \dfrac{y'(t)}{2}$ (3).

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$: $\varepsilon\varphi\omega(t_0) = \dfrac{y(t_0)}{2} = \dfrac{1}{2}$

Άρα $(3) \Leftrightarrow \left(1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t_0)\right) \cdot \omega'(t_0) = \dfrac{y'(t_0)}{2} \Leftrightarrow \left(1 + \dfrac{1}{4}\right) \cdot \omega'(t_0) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4} \cdot \omega'(t_0) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \dfrac{1}{5}$ rad/sec.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(x) \le 1+\frac{1}{e}$ αφού η f έχει σύνολο τιμών το $\left(-\infty, 1+\frac{1}{e}\right]$

1^{ος} τρόπος

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $f(x_0) = 1+\frac{1}{e}$.

Άρα $f(x) \le f(x_0)$

Καθώς η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0, το x_0 είναι εσωτερικό σημείου του $(0,+\infty)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat ισχύει $f'(x_0)=0$.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)\cdot x - (\ln x+\alpha)}{x^2} = \frac{1+\alpha x - \ln x - \alpha x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}, x>0.$$

Άρα $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = e$.

Άρα $f(e) = 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+\alpha e}{e} = 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e}+\alpha = 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = 1$.

2^{ος} τρόπος

Βρίσκουμε ότι $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, x>0$.

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = e$.

$f'(x_0) > 0 \Leftrightarrow 1-\ln x_0 > 0 \Leftrightarrow \ln e > \ln x_0 \Leftrightarrow x_0 < e$

$f'(x_0) < 0 \Leftrightarrow 1-\ln x_0 < 0 \Leftrightarrow \ln e < \ln x_0 \Leftrightarrow x_0 > e$

Το πρόσημο της f΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

x	0	e	$+\infty$
f'	+		-
f	↗	Μεγ	↘

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο e το $f(e) = \frac{1+\alpha e}{e} = \frac{1}{e}+\alpha$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+\alpha\right) = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\alpha\right) = 0+\alpha = \alpha$$

γιατί $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0,e]$. Άρα $f(A_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(e)\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e}+\alpha\right]$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = (e,+\infty)$ άρα,

$$f(A_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to e} f(x)\right) = \left(\alpha, \frac{1}{e}+\alpha\right).$$

Συνεπώς, $f((0,+\infty)) = f(A_1)\cup f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{e}+\alpha\right]$, άρα $\frac{1}{e}+\alpha = 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Δ2. Είναι $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+1,\ x>0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ άρα και στο $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\subseteq(0,e]$ επομένως η εξίσωση

$f(x)=0$, έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

Η f συνεχής στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$f(1)=1>0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-2\ln 2+1=\ln e-\ln 4=\ln\frac{e}{4}<0 \text{ διότι } \frac{e}{4}<1.$$

Δηλαδή $f(1)\cdot f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ το x_0 είναι μοναδικό.

Από το Δ1 είναι $f(A_2)=\left(1,\dfrac{1}{e}+1\right)$.

Το $0\notin f(A_2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $A_2=(e,+\infty)$.

Δ3.

i. $f(2)=\dfrac{2+\ln 2}{2}$

$$f(4)=\frac{4+\ln 4}{4}=\frac{4+2\ln 2}{4}=\frac{2(2+\ln 2)}{4}=\frac{2+\ln 2}{2}=f(2)$$

Άρα: $f(2)=f(4)$

- Για $x\in(0,e]$ f γνησίως αύξουσα, άρα f 1−1 στο $(0,e]$.
- Για $x\in[e,+\infty)$ f γνησίως φθίνουσα, άρα f 1−1 στο $[e,+\infty)$.

η δοθείσα εξίσωση γίνεται: $f(x)=f(4)=f(2)$

Για $x\in(0,e]$, $2\in(0,e]$: $f(x)=f(2)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}x_1=2$

Για $x\in[e,+\infty)$, $4\in[e,+\infty)$: $f(x)=f(4)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}x_2=4$

Άρα η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει 2 ακριβώς ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

ii. $\Gamma\iota\alpha\ x\in(0,+\infty): 2^x \le x^2 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}+1 \le \frac{\ln x}{x}+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\ln 2+2}{2} \le \frac{\ln x + x}{x} \Leftrightarrow f(2) \le f(x)$

<u>1^ος τρόπος</u>

$\Gamma\iota\alpha\ x\in(0,e]$, $2\in(0,e]$ $\eta\ f\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha$

$f(2)\le f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 2\le x$, όμως $x\in(0,e]$ άρα είναι $x\in[2,e]$

$\Gamma\iota\alpha\ x\in(e,+\infty)$, $4\in(e,+\infty)$ $\eta\ f\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha$

$f(2)\le f(x) \Leftrightarrow f(4)\le f(x) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} 4\ge x \Leftrightarrow x\le 4$, όμως $x\in(e,+\infty)$ άρα είναι $x\in(e,4]$

Άρα οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι : $x\in[2,4]$.

<u>2^ος τρόπος</u>

Έστω $\mathrm{A}_1=[2,e]$ $\kappa\alpha\iota$ $\mathrm{A}_2=[e,4]$

$f\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ \mathrm{A}_1 \Rightarrow f(x)\ge f(2)$

$f\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ \mathrm{A}_2 \Rightarrow f(x)\ge f(4) \Leftrightarrow f(x)\ge f(2)$

Άρα τα $x\in[2,4]$ είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)\ge f(2)$

Για $x<2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(2)$

Για $4<x \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)<f(4) \Leftrightarrow f(x)<f(2)$

Επομένως $x\in[2,4]$.

Δ4. **<u>1^ος τρόπος</u>**

$g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}$

➢ Για $\ln\frac{1}{2}\le x\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le e^x\le 1$

Από Δ_2 για $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ έχουμε: $f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$ και

για $e^x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ έχουμε:

- $f(e^x)=0\Leftrightarrow e^x=x_0 \Leftrightarrow x=\ln x_0$
- $f(e^x)>0\Leftrightarrow f(e^x)>f(x_0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 1>e^x>x_0 \Leftrightarrow 0>x>\ln x_0$
- $f(e^x)<0\Leftrightarrow f(e^x)<f(x_0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}<e^x<x_0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2}<x<\ln x_0$

➢ Για $\ln\frac{1}{2}\le x\le 0 \Leftrightarrow -\ln\frac{1}{2}\ge -x\ge 0 \Leftrightarrow 1+\ln 2\ge 1-x\ge 1>0$

$\mathrm{K}\alpha\iota\ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \ e^x>0\ \ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ \ \frac{1-x}{e^x}>0,\ x\in\left[\ln\frac{1}{2},0\right]$

Η g είναι συνεχής στο $\left[\ln\frac{1}{2},0\right]$ και το πρόσημο της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$\ln\frac{1}{2}$		$\ln x_0$		0
$g(x)$		-	0	+	

$$E=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{0}|g(x)|dx=-\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln x_0}g(x)dx+\int_{\ln x_0}^{0}g(x)dx=I_1+I_2.$$

$$I_1=-\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln x_0}g(x)dx=\int_{\ln x_0}^{\ln\frac{1}{2}}f(e^x)\frac{1-x}{e^x}dx.$$

Θέτω $u=e^x\Leftrightarrow x=\ln u$.

Είναι $du=e^x dx$.

Για $x=\ln x_0, u=x_0$ και για $x=\ln\frac{1}{2}, u=\frac{1}{2}$.

Άρα, $I_1=\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}f(u)\frac{1-\ln u}{u^2}du=\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}f(u)f'(u)du=\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{\frac{1}{2}}=\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)-f^2(x_0)}{2}=\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}.$

Για το ολοκλήρωμα I_2 θέτω $u=e^x\Leftrightarrow x=\ln u$ και άρα είναι $du=e^x dx$.

Για $x=\ln x_0, u=x_0$ και για $x=0, u=1$.

Άρα $I_2=\int_{\ln x_0}^{0}f(e^x)\frac{1-x}{e^x}dx=\int_{\ln x_0}^{0}f(e^x)\frac{1-x}{e^{2x}}e^x dx=\int_{x_0}^{1}f(u)\frac{1-\ln u}{u^2}du=\int_{x_0}^{1}f(u)f'(u)du=\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}$

$$=\frac{f^2(1)-f^2(x_0)}{2}=\frac{f^2(1)}{2}.$$

Τελικά, $E=I_1+I_2=\dfrac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+f^2(1)}{2}=\dfrac{\ln^2\frac{e}{4}+1}{2}=1-2\ln2+2\ln^2 2$ τετραγωνικές μονάδες.

2ος τρόπος

$$E=\int_{-\ln2}^{0}|g(x)|dx$$

$$g(x)=f(e^x)\frac{1-x}{e^x}=f(e^x)\cdot\frac{(1-x)e^x}{(e^x)^2}=f(e^x)\cdot f'(e^x)\cdot e^x$$

καθώς $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ και $f'(e^x)=\dfrac{1-x}{(e^x)^2}$.

Άρα $E=\int_{-\ln2}^{0}|f(e^x)\cdot f'(e^x)\cdot e^x|dx=\int_{-\ln2}^{0}|f(e^x)\cdot f'(e^x)|e^x dx.$

Θέτω $e^x=u\Leftrightarrow x=\ln u$ και επομένως είναι $du=e^x dx$.

Για $x=-\ln 2, u=\frac{1}{2}$ και για $x=0, u=1$.

Άρα $E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)f'(u)\right|du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\right|f'(u)du$

αφού για $u\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ έχουμε $f'(u)>0$.

Για $\frac{1}{2}<u<x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(u)<f(x_0)\Rightarrow f(u)<0$ και

για $x_0<u<1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(u)>f(x_0)\Rightarrow f(u)>0$.

Άρα $E=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u)f'(u)du+\int_{x_0}^{1} f(u)f'(u)du=-\frac{1}{2}\left[f^2(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\frac{1}{2}\left[f^2(u)\right]_{x_0}^{1}=$

$=-\frac{1}{2}f^2(x_0)+\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^2(1)-\frac{1}{2}f^2(x_0)=\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^2(1)=\frac{1}{2}(1-2\ln 2)^2+\frac{1}{2}$

$=\frac{1-4\ln 2+4\ln^2 2+1}{2}=\frac{2(1-2\ln 2+2\ln^2 2)}{2}=1-2\ln 2+2\ln^2 2$ τετραγωνικές μονάδες.