ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ από το 1967

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ & ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ :
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1. Σχολικό σελ. 142-143**

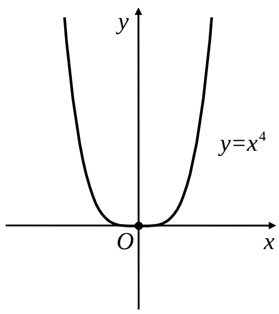
**Α2.**

**α. Ψ**

**β.** Για να είναι το $x_0$ θέση σημείου καμπής της f πρέπει επιπλέον να αλλάζει το πρόσημο της f ΄΄ εκατέρωθεν του $x_0$ (δηλαδή πρέπει να αλλάζει η κυρτότητα της f εκατέρωθεν του $x_0$).

**<u>Αντιπαράδειγμα :</u>**

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$, $x\in\Re$. Η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$. Η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, επομένως η $f$ είναι κυρτή στο $\Re$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\Re$, αφού $f''(0)=0$.




**Α3. δ.**

**Α4.**

**α) Σωστό**
**β) Λάθος**
**γ) Σωστό**
**δ) Λάθος**
**ε) Λάθος**

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $h'(x)=\left(\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\right)'=\dfrac{e^x(1+e^{2x})-e^x\cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}=\dfrac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}=0 \underset{1+e^{2x}>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} 1-e^{2x}=0\Leftrightarrow e^{2x}=1\Leftrightarrow e^{2x}=e^0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0.$$

$$h'(x)>0\Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}>0 \underset{1+e^{2x}>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} 1-e^{2x}>0\Leftrightarrow e^{2x}<1\Leftrightarrow e^{2x}<e^0\Leftrightarrow 2x<0\Leftrightarrow x<0$$

$$h'(x)<0\Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}<0 \underset{1+e^{2x}>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} 1-e^{2x}<0\Leftrightarrow e^{2x}>1\Leftrightarrow e^{2x}>e^0\Leftrightarrow 2x>0\Leftrightarrow x>0$$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | 0 | - |
| $h(x)$ | ↗ | Ο.Μ. | ↘ |

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Η h παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_0=0$ το $h(0)=\dfrac{1}{2}$.

**Β2.** Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$, άρα $h(\Delta_1)=(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(0)]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}=\dfrac{0}{1+0}=0$, άρα $h(\Delta_1)=\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$, άρα $h(\Delta_2)=(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),h(0)]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2e^x}=0$ , άρα $h(\Delta_2)=\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

Τελικά : $h(A)=h(\Delta_1)\cup h(\Delta_2)=\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

**Β3.** Η h είναι συνεχής στο $\Re$, άρα η $C_h$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$, άρα η $C_h$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$, άρα η $C_h$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y=0$.

Επομένως η h δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

**Β4.** $\displaystyle\int_0^1 e^x\cdot h(x)dx=\int_0^1 e^x\cdot\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int_0^1\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}}dx=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left[\ln(1+e^{2x})\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[\ln(1+e^2)-\ln 2\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^2}{2}$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

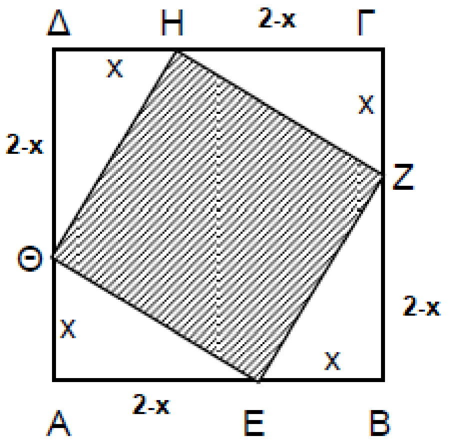
## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Είναι : $\mathrm{B\Gamma} = 2\ cm$, $\Gamma\mathrm{Z} = x\ cm$ άρα : $\mathrm{BZ} = 2 - x\ \ cm$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΖ έχουμε :

$\mathrm{EZ}^2 = \mathrm{EB}^2 + \mathrm{BZ}^2 \Leftrightarrow \mathrm{EZ}^2 = x^2 + (2-x)^2 \Leftrightarrow \mathrm{EZ}^2 = 2x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{EZ} = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$, $0 \le x \le 2$.




**Γ2.** $\mathrm{E}_{\mathrm{EZH\Theta}} = \mathrm{EZ}^2 = 2x^2 - 4x + 4$, άρα $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$, $0 \le x \le 2$.

**Γ3.** $f'(x) = \left(2x^2 - 4x + 4\right)' = 4x - 4$, $0 \le x \le 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

| x | 0 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | Ο.Μ | ↘ | Ο.Ε. | ↗ | Ο.Μ. |

Άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$. Επιπλέον η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 2$ και μέγιστα στα $x_1 = 0$ και $x_2 = 2$ τα $f(0) = f(2) = 4$.

**Γ4.** Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathrm{A}_1 = [0,1]$, άρα $f(\mathrm{A}_1) = [f(1), f(0)] = [2,4]$.

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathrm{A}_2 = [1,2]$, άρα $f(\mathrm{A}_2) = [f(1), f(2)] = [2,4]$.

Άρα το σύνολο τιμών της $f$ είναι : $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{A}_1) \cup f(\mathrm{A}_2) = [2,4]$.

Δηλαδή $2 \le f(x) \le 4$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Όμως αναζητούμε αν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$

Έτσι : $0 \le x_0 \le 2 \Leftrightarrow e^0 \le e^{x_0} \le e^2 \Leftrightarrow 4 \le 4e^{x_0} \le 4e^2 \Leftrightarrow 5 \le 4e^{x_0} + 1 \le 4e^2 + 1$

Άρα $f(x) \le 4 < 5 \le 4e^{x_0} + 1$, δηλαδή $f(x) < 4e^x + 1$ για κάθε $x \in [0,2]$, επομένως δεν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$ ώστε $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

# ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Η $f$ είναι συνεχής στο [0,3] ως παραγωγίσιμη σε αυτό και δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Ε.Τ. στο [0,3], άρα $f(0)=f(3)=2$.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,2)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$.

Οπότε $\mathrm{E}=\int_0^3|f'(x)|dx=8 \Leftrightarrow -\int_0^2 f'(x)dx+\int_2^3 f'(x)dx=8 \Leftrightarrow -[f(x)]_0^2+[f(x)]_2^3=8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f(2)+f(0)+f(3)-f(2)=8 \Leftrightarrow -f(2)+2+2-f(2)=8 \Leftrightarrow -2f(2)=4 \Leftrightarrow f(2)=-2$

Επίσης :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH\,*}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}\overset{f'\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}\frac{f'(1)}{1}=-3$$ (* η $f$ παραγωγίσιμη κοντά στο 1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{f(x)-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f'(x)}=-\infty$$

Γιατί $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=0$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x$ κοντά στο $0^+$.

**Δ2.** Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,2)$ και η $f$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως παραγωγίσιμη, άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.Επιπλέον $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$ και η $f$ είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως παραγωγίσιμη, άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$.

| x | 0 | | 2 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | Τ.Μ | ↘ | Τ.Ε. | ↗ | Τ.Μ. |

Η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα $x_1=0$, $x_2=3$ και τοπικό ελάχιστο (ολικό) στο $x_3=2$ το $f(2)=-2$.

Ακόμα από το διάγραμμα έχουμε ότι η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$

| x | 0 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | ↘ | 0 | ↗ | |
| $f(x)$ | | | Σ.Κ. | | |

Άρα η $f$ είναι κοίλη στο $[0,1]$, κυρτή στο $[1,3]$ και το σημείο $(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

**Δ3.** Αν είναι $f(x_0) \neq 0$ τότε το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$ υπάρχει αφού η $f$ είναι συνεχής στο $[0,3]$ άρα και στο $[2,3]$. Επομένως για να μην υπάρχει το όριο θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ ώστε $f(x_0)=0$ και η $f$ να μην διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0$.

Η $f$ είναι συνεχής στο $[2,3]$ και $f(2)\cdot f(3) = -2\cdot 2 = -4 < 0$, άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ ώστε $f(x_0)=0$. Επίσης η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$ άρα το $x_0$ είναι και μοναδικό. Επιπλέον $x_0 \in (2,3)$ άρα :

Για $x < x_0 \overset{f\uparrow[2,3]}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ κοντά στο $x_0^-$, άρα $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Για $x > x_0 \overset{f\uparrow[2,3]}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ κοντά στο $x_0^+$, άρα $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως το παραπάνω όριο στο $x_0$ δεν υπάρχει.

**Δ4.** Σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών της $f$ που προκύπτει από τα δεδομένα του Δ2. έχουμε:

| x | 0 | 1 | | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | - | | + |
| $f'(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |
| $f$ | | Σ.Κ. | | Ο.Ε. | |