

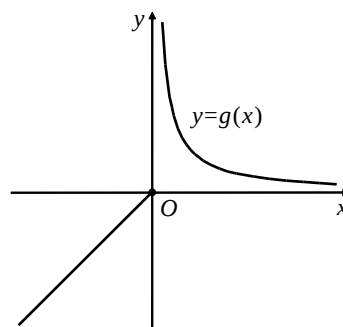
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2018**ΘΕΜΑ Α****A1. Σχολικό σελ. 99****A2.****α. Ψευδής****β. Σχολικό σελ. 35**

Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

**A3. Σχολικό σελ. 216****A4.**

- α) Λάθος**
- β) Λάθος**
- γ) Σωστό**
- δ) Σωστό**
- ε) Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

B1. $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$ και παραγωγίσιμη με :

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 + 8) > 0$$

Επομένως :

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$x^3 + 8$	-	0	+		+
x^3	-		-		+
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$		T.M.			

Η f συνεχής στο $(-\infty, -2]$, παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$.

Η f συνεχής στο $[-2, 0)$, παραγωγίσιμη με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-2, 0)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$, παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$ το $f(-2) = -3$.

B2. Η $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$, $x \neq 0$, είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = -\frac{24}{x^4}$, $x \neq 0$.

$f''(x) = -\frac{24}{x^4} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, άρα η f κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Η C_f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

B3. Για κατακόρυφη ψάχνω στο $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$, καθώς $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ για $x < 0$ και x κοντά στο 0.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x^2} = +\infty$. Οπότε η ευθεία $(\varepsilon_1): x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Για πλάγιες – οριζόντιες ψάχνω στο $\pm \infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1, \text{ καθώς } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0.$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1, \text{ καθώς } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^3} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0.$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

2ος Τρόπος Παρατηρούμε ότι στο $\pm \infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0.$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

B4. Έχουμε :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$, καθώς $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = +\infty$, καθώς $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$, καθώς $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ για $x > 0$ και x κοντά στο 0. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x^2} = +\infty$.

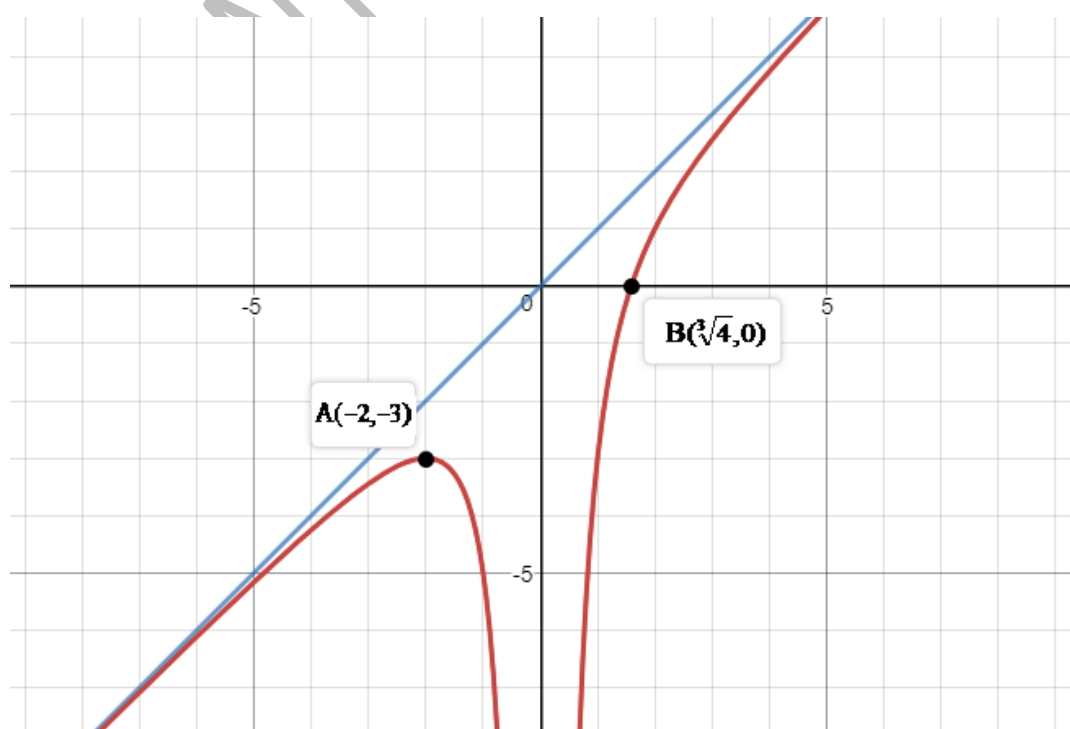
• Σημεία τομής με $x'x$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$. Δηλ. το $A(\sqrt[3]{4}, 0)$.

• Η C_f δεν τέμνει τον $y'y$ καθώς $0 \notin A_f$. Επίσης η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ο παρακάτω πίνακας :

Πίνακας μεταβολών :

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-		+
$f''(x)$	-		-		-
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-3	↘		↗



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Με το σύρμα μήκους x κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς $a = \frac{x}{4}$, το οποίο

$$\text{έχει εμβαδόν } E_1(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

Με το υπόλοιπο σύρμα μήκους $8-x$ κατασκευάζουμε κύκλο μήκους $L=2\pi r$, άρα

$$2\pi r = 8-x \Leftrightarrow r = \frac{8-x}{2\pi}. \text{ Άρα το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου θα είναι}$$

$$E_2(x) = \pi \cdot \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}. \text{ Το ολικό εμβαδόν}$$

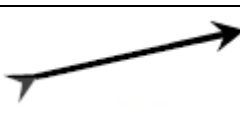
$$E(x) = E_1(x) + E_2(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi \cdot x^2 + 4(64 - 16x + x^2)}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$$

για $0 < x < 8$

Γ2. $E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, $x \in (0,8)$, παραγωγίσιμη με

$$E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi} = \frac{1}{8\pi} \cdot [(4+\pi) \cdot x - 32]$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{4+\pi}$$

x	0	$\frac{32}{4+\pi}$	8
$E'(x)$	-		+
E		Ελάχιστο	

Η $E(x)$ είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$, παραγωγίσιμη με $E'(x) < 0$, για $x \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$, άρα η $E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$.

Η $E(x)$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$, παραγωγίσιμη με $E'(x) > 0$, για $x \in \left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$, άρα η $E(x)$ γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$.

Η $E(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0 = \frac{32}{4+\pi}$, άρα η πλευρά του τετραγώνου

$$a = \frac{x_0}{4} = \frac{32}{4 \cdot (\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}. \text{ Τότε η διάμετρος του κύκλου θα είναι}$$

$$\delta = 2\rho = 2 \cdot \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{2\pi} = \frac{8\pi}{\pi \cdot (\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}, \text{ άρα } \delta = \frac{x_0}{4}.$$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 8)$ ώστε $E(x_1) = 5$.

$$\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]. \text{ Η } E \text{ γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο } \Delta_1, \text{ άρα}$$

$$E(\Delta_1) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

$$\text{Το } 5 \in E(\Delta_1), \text{ αφού } 5 < \frac{16}{\pi} \Leftrightarrow 5\pi < 16 \Leftrightarrow \pi < 3,2 \text{ ισχύει όπως και}$$

$$\frac{16}{\pi+4} < 5 \Leftrightarrow 16 < 5\pi + 20 \Leftrightarrow -4 < 5\pi \text{ ισχύει. Η } E(x) \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \Delta_1, \text{ άρα το } x_1 \text{ είναι μοναδικό.}$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right). \text{ Η } E \text{ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο } \Delta_2, \text{ άρα}$$

$$E(\Delta_2) = \left(E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x)\right) = \left(\frac{16}{\pi+4}, 4\right) \text{ (} E \text{ συνεχής στο } \frac{32}{\pi+4} \text{), άρα } 5 \notin E(\Delta_2).$$

Άρα το x_1 μοναδικό.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow x = \alpha$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > 1 \Leftrightarrow x > \alpha$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 < 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} < 1 \Leftrightarrow x < \alpha$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f		Σ.Κ.	

Το $A(\alpha, 2 - \alpha^2)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f .

Δ2. Από Δ1. και καθώς η f' είναι συνεχής στο α , έχουμε : $f' \downarrow (-\infty, \alpha]$ και $f' \uparrow [\alpha, +\infty)$ με $f'(\alpha) = 2 - 2\alpha = 2(1 - \alpha) < 0$ για κάθε $\alpha > 1$.

$$\text{➤} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = +\infty, \quad \text{καθώς} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-\alpha} \stackrel{u=x-\alpha}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty, u \rightarrow -\infty} e^u = 0.$$

$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$$

$$\text{➤} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2e^x \left(\frac{1}{e^\alpha} - \frac{x}{e^x} \right) \right] \quad (1)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\text{Άρα : } (1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Στο $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$ η f' γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα :

$$f'(\Delta_1) = [f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)] = [2(1 - \alpha), +\infty)$$

Στο $\Delta_2 = (\alpha, +\infty)$ η f' γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα :

$$f'(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = (2(1 - \alpha), +\infty)$$

καθώς $2(1 - \alpha) < 0$ για κάθε $\alpha > 1$, έχουμε ότι το $0 \in f'(\Delta_1)$ και η f' γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 , άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, \alpha]$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$. Επίσης : το $0 \in f'(\Delta_2)$ και η f' γνησίως αύξουσα στο Δ_2 , άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (\alpha, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$, με $x_1 < x_2$.

➤ Αν $x < \alpha$

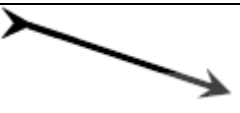
$$x < x_1 \stackrel{f' \downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$x_1 < x < \alpha \stackrel{f' \downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

➤ Αν $x > \alpha$

$$\alpha < x < x_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

$$x > x_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

x	$-\infty$	x_1		α		x_2	$+\infty$
f'	+	0	-		-	0	+
f							

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Δ3. 1^{ος} Τρόπος

Έχουμε ότι $1 \in (x_1, x_2)$ όπου από Δ2. η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και "1-1" καθώς αν

$$1 < x_1, \text{ η } f' \downarrow \text{ για κάθε } x < \alpha, \text{ άρα } 1 < x_1 \stackrel{f' \downarrow}{\Leftrightarrow} f'(1) > f'(x_1) = 0 \quad (f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x)$$

$$\text{Άρα } f'(1) > 0 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} > 2 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} > 1 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} > e^0 \Leftrightarrow 1-\alpha > 0 \Leftrightarrow 1 > \alpha$$

Άτοπο.

$$\text{Έτσι λοιπόν έχουμε : } f(x) = f(1) \stackrel{f \text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow} x = 1$$

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει μοναδική λύση στο (x_1, x_2) την $x = 1$.

Καθώς, το 1 δεν ανήκει στο (α, x_2) , αφού $\alpha > 1$, η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη στο (α, x_2) .

2^{ος} Τρόπος

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 = 2(e^{1-\alpha} - 1) < 0, \text{ αφού } \alpha > 1 \Leftrightarrow 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < 1.$$

Έτσι : $1 \in (x_1, x_2)$ και $\alpha > 1$, άρα, $1 \in (x_1, \alpha)$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και "1-1", στο (x_1, x_2) , οπότε η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει μοναδική λύση τη $x=1$ στο (x_1, x_2) . Όμως $1 \in (x_1, \alpha)$, άρα συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α, x_2) .

3^{ος} Τρόπος

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (α, x_2) , άρα
 $f((\alpha, x_2)) = (f(x_2), f(\alpha)) = (f(x_2), 2 - \alpha^2)$, αφού f συνεχής στα x_2, α .

Θα αποδείξουμε ότι $f(1) > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$, για $\alpha > 1$.

Έστω $g(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3$, $x \geq 1$. Θα δείξουμε ότι $g(x) > 0$, για $x > 1$.

Έχουμε $g(1) = 0$ και g παραγωγίσιμη με :

$g'(x) = -2e^{1-x} + 2x$ για $x \geq 1$ με $g'(1) = 0$. Η g' παραγωγίσιμη με $g''(x) = 2e^{1-x} + 2 > 0$, $x \geq 1$.

Άρα η $g'(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ άρα για

$x \geq 1 \Leftrightarrow g'(x) \geq g'(1) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0$, η ισότητα μόνο για $x = 1$ και g συνεχής στο 1, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ δηλαδή για $x > 1 \Leftrightarrow g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0$.

Δ4. $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(2) = -2$ και $f'(2) = -2$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f

στο $(2, f(2))$ είναι $(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = -2x + 2$.

Από ερώτημα Δ₁ έχουμε ότι η f είναι κυρτή στο $[2, 3]$, συνεπώς $f(x) \geq -2x + 2$, $x \in [2, 3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$. Επιπλέον έχουμε ότι $\sqrt{x-2} \geq 0$, $x \in [2, 3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 2. Άρα

$f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2}$, $x \in [2, 3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 2.

Τα μέλη είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[2, 3]$ επομένως

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} dx > -2 \int_2^3 x \cdot \sqrt{x-2} dx + 2 \int_2^3 \sqrt{x-2} dx \quad (2)$$

• $\int_2^3 x \cdot \sqrt{x-2} dx$ θέτω $u = x - 2$, άρα $du = dx$ και για $x = 2$, $u = 0$ και για $x = 3$, $u = 1$

$$\int_0^1 (u+2) \sqrt{u} du = \int_0^1 u \cdot \sqrt{u} du + 2 \int_0^1 \sqrt{u} du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} du + 2 \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{5} [u^{\frac{5}{2}}]_0^1 + 2 \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{26}{15}$$

• $\int_2^3 \sqrt{x-2} dx = \int_2^3 (x-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \left[(x-2)^{\frac{3}{2}} \right]_2^3 = \frac{2}{3}$

Άρα η (2) : $\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} dx > -2 \cdot \frac{26}{15} + 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{32}{15}$