

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ****ΘΕΜΑ Α****A1.** Σχολικό σελ. 135**A2.**

α. Λ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι

παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$. Η

γραφική παράσταση της f παρουσιάζει γωνιακό σημείο στο $(0,0)$.

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα είναι και συνεχής στο x_0 .

A3. Σχολικό σελ. 73**A4.**

- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Λάθος
- δ) Σωστό
- ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $f(x) = \ln x$ με $A_f = (0, +\infty)$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$ με $A_g = \mathbb{R} - \{1\}$

Για να ορίζεται η $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in (0,1) \end{cases} \cdot \text{Δηλ. } A_{f \circ g} = (0,1).$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \frac{x}{1-x} \text{ με } x \in (0,1).$$

B2. Η $h(x) = (f \circ g)(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$h'(x) = \left[\ln \left(\frac{x}{1-x} \right) \right]' = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, άρα είναι «1-1» και αντιστρέψιμη.

$$\text{Θέτουμε } h(x) = y \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - x e^y \Leftrightarrow x + x e^y = e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1 + e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y + 1}, y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επίσης } x \in (0,1) \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{e^y + 1} < 1$$

$$\frac{e^y}{e^y + 1} > 0 \text{ ισχύει για κάθε } y \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{e^y}{e^y + 1} < 1 \text{ ισχύει για κάθε } y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Τελικά : } h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

B3. $\phi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \phi'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right)' = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$



Άρα η ϕ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και δεν έχει ακρότατα.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \phi''(x) = \left(\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right)' = \frac{e^x(e^x + 1)^2 - e^x \cdot 2(e^x + 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

$$\phi''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\phi''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\phi''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\phi''(x)$	$+$	0	$-$
ϕ		Σ.Κ.	



Άρα η ϕ είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και η ϕ είναι κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

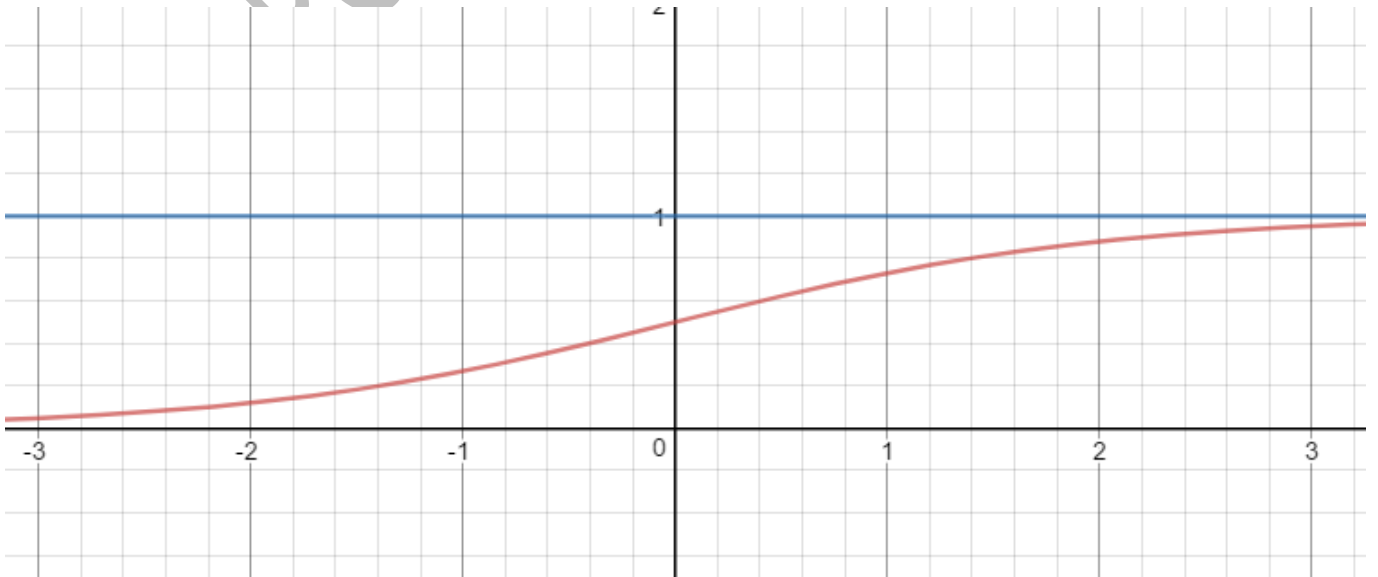
Το σημείο $A(0, \phi(0))$ δηλ. το $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι σημείο καμπής της ϕ .

B4. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$, άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{1} = 0$, άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Πίνακας μεταβολών :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\phi''(x)$	$+$	0	$-$
$\phi'(x)$	$+$		$+$
ϕ		Σ.Κ.	



ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Έχουμε $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi]$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\varepsilon: y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(x - x_0) \text{ και } A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \in \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu x - \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, \pi]$

Αρκεί να δείξουμε ότι η $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $[0, \pi]$

Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0 = g(\pi)$ και $g'(x) = -\eta\mu x \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in (0, \pi)$

με $g'(x) = 0$ για $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = \pi$.

$-\eta\mu x < 0$ για $x \in (0, \pi)$ άρα το πρόσημο της g' προκύπτει στον παρακάτω πίνακα

	0	$\frac{\pi}{2}$	π
g'		-	+
g		γν. φθ.	γν. αυξ.

Έστω $A_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_1 άρα

$$g(A_1) = \left[g\left(\frac{\pi}{2}\right), g(0)\right] = \left[-\frac{2-\pi}{2}, 0\right].$$

$g(0) = 0$ και g γνησίως φθίνουσα στο A_1 άρα το 0 μοναδική ρίζα στο A_1 .

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ άρα

$$g(A_2) = \left(g\left(\frac{\pi}{2}\right), g(\pi)\right) = \left(-\frac{2-\pi}{2}, 0\right) \text{ (} g \text{ συνεχής στο } \frac{\pi}{2} \text{)}$$

$g(\pi) = 0$ και g γνησίως αύξουσα στο A_2 άρα το π μοναδική ρίζα.

Β' τρόπος: Έστω ότι η g έχει και τρίτη ρίζα $\rho \in (0, \pi)$. Τότε

g συνεχής στο $[0, \rho]$ και στο $[\rho, \pi]$

παραγωγίσιμη στο $(0, \rho)$ και στο (ρ, π) και $g'(x) = -\eta\mu x(\frac{\pi}{2} - x)$ με $g'(x) = -\eta\mu x(\frac{\pi}{2} - x)$

$g(0) = g(\rho) = g(\pi)$ και σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει τουλάχιστον ένα

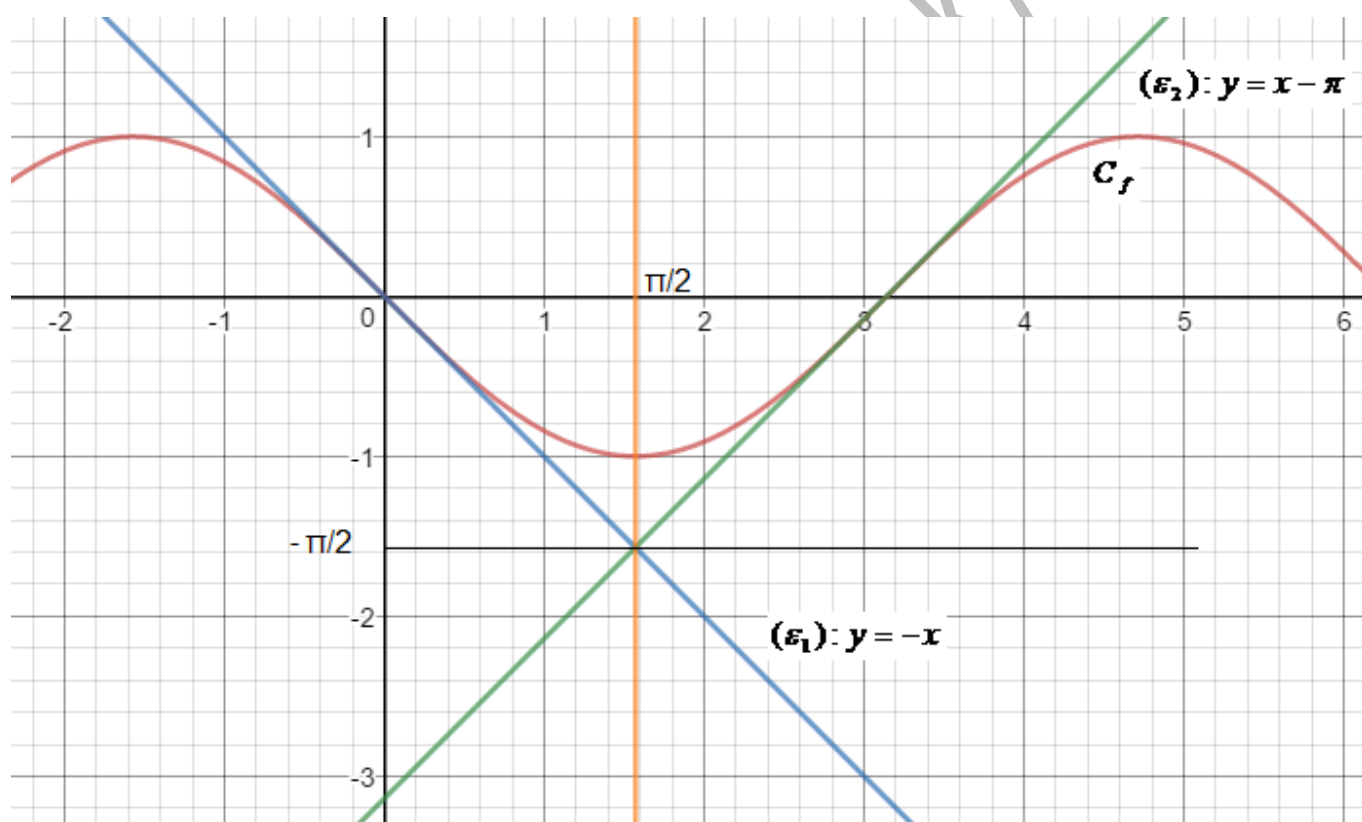
$\xi_1 \in (0, \rho)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\rho, \pi)$ ώστε $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$ άτοπο αφού η $g'(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0, \pi)$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x = 0$ και $x = \pi$ και οι εξισώσεις των

εφαπτομένων είναι $\varepsilon_1 : y - 0 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x$ στο $M(0, 0)$

$\varepsilon_2 : y - 0 = 1(x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi$ στο $N(\pi, 0)$

Γ_2 .



$\varepsilon_1 : y = -x$ και $\varepsilon_2 : y = x - \pi$

$$E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\eta\mu x + x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi) dx = \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^2 - 8}{4} \tau.μ.$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = 2\tau.μ.$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \frac{\pi^2 - 8}{8} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

$$\Gamma 3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\eta\mu x + x}{f(x) - x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \left[(-\eta\mu x + x) \cdot \frac{1}{f(x) - x + \pi} \right] = +\infty \text{ καθώς :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (-\eta\mu x + x) = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) - x + \pi) = 0$$

Επίσης για κάθε η f είναι συνεχής στο $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x) = \eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, δηλ. η f είναι κυρτή στο $[0, \pi]$, επομένως η εφαπτομένη (ε_2): $y = x - \pi$ της C_f στο $x_0 = \pi$, βρίσκεται κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα $f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi \geq 0$ και το «=» ισχύει μόνο για $x_0 = \pi$. Έτσι $f(x) - x + \pi > 0$ κοντά στο $x_0 = \pi$ άρα : $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{f(x) - x + \pi} = +\infty$.

Γ4. Από Γ3. $f(x) \geq x - \pi$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = \pi > e$.

Επομένως για κάθε $x \in [1, e]$ ισχύει : $f(x) > x - \pi \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$, άρα :

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > [x - \pi \ln x]_1^e \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi - 1.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4} & , x \in [-1, 0) \\ e^{x\eta\mu x} & , x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Δ1.

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι συνεχής στο $(0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x\eta\mu x}) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$f(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{4/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -(-x)^{1/3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και το $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο αυτής.

Στο $(-1,0)$ η $f'(x) = (-x)^{4/3} = \frac{4}{3} -x^{1/3}(-1) < 0$ άρα η f δεν παρουσιάζει κρίσιμα σημεία στο

$(-1,0)$

Στο $(0,\pi)$

$$\eta \ f'(x) = e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = -\sigma \upsilon \nu x \Leftrightarrow (\sigma \upsilon \nu x \neq 0)$$

$$\epsilon \phi x = -1 \Leftrightarrow x = \kappa \pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \kappa \pi - \frac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 < \kappa - \frac{1}{4} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < \kappa < \frac{5}{4} \text{ και } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ άρα } \kappa = 1$$

$$\Delta \eta \lambda \alpha \delta \eta \ x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Άρα το $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

Δ2.

$f'(x) < 0$, $\forall x \in (-1,0)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$.

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$				
$f(x)$	γν. φθίνουσα	γν. αύξουσα	γν. φθίνουσα	
	T.M.	min	max	min

$$f(-1) = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{4} = e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \eta\mu \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(\pi) = 0$$

Για $x_1 = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Για $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ η f παρουσιάζει μέγιστο.

Για $x_3 = 0$ και $x_4 = \pi$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = [-1, 0) \\ f \text{ συνεχής και γν. φθίν.} \end{array} \right\} f(\Delta_1) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(-1) \Big] \Leftrightarrow f(\Delta_1) = 0, 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_2 = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \\ f \text{ συνεχής και γν. αύξ.} \end{array} \right\} f(\Delta_2) = \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] \Leftrightarrow f(\Delta_2) = \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \eta\mu \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{όμως } \eta\mu \frac{3\pi}{4} = \eta\mu \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{άρα } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_3 = \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \\ f \text{ συνεχής και γν. φθίν.} \end{array} \right\} f(\Delta_3) = \left[f(\pi), \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(x) \right] \Leftrightarrow f(\Delta_3) = \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Δ3.

$$E \quad C_f, C_g, g(x) = e^{5x}, x \in \mathbb{R}, x=0, x=\pi$$

$$\text{Έστω } h(x) = f(x) - g(x) = e^x \eta\mu x - e^{5x} = e^x (\eta\mu x - e^{4x})$$

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 4x \leq 4\pi \Leftrightarrow 1 \leq e^{4x} \leq e^{4\pi} \Leftrightarrow$$

$$-1 \geq -e^{4x} \geq -e^{4\pi}$$

$$1 \geq \eta\mu x \geq -1$$

$$0 \geq \eta\mu x - e^{4x} \geq -1 - e^{4\pi}$$

ή αλλιώς

$$\eta\mu x < x, \quad x > 0$$

όμως $e^x > x$, $x \in \mathbb{R}$, από γνωστή ανίσωση $\ln x \leq x - 1, x > 0$

όπου $x \rightarrow e^{4x}$ προκύπτει $\ln e^{4x} \leq e^{4x} - 1 \Leftrightarrow e^{4x} \geq 4x + 1 > 4x > x$ για $x > 0$

έτσι $e^{4x} > x > \eta\mu x$

άρα $e^{4x} > \eta\mu x$

$$\text{Άρα } E = -\int_0^\pi h(x) dx = \int_0^\pi e^{5x} - e^x \eta\mu x \, dx = \left[\frac{e^{5x}}{5} \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x \, dx = \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{1}{5} - \frac{e^\pi + 1}{2} \text{ τ.μ.}$$

$$I = \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x \, dx = [e^x (-\sigma\upsilon\nu x)]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x \, dx =$$

$$= e^\pi + 1 + \int_0^\pi e^x (\eta\mu x)' \, dx = e^\pi + 1 + [e^x \eta\mu x]_0^\pi - I$$

$$\Leftrightarrow 2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

Δ4

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \left(\frac{4x - 3\pi}{4} \right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f(x) + \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f(x) \quad \text{και} \quad x - \frac{3\pi}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{μοναδικό, τοπικό μέγιστο}$$

ή

$$f(x) - \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2$$

$$\text{Όμως } f(x) \leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{άρα} \quad f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \leq 0$$

$$f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \leq 0$$

$$\text{όμως } \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2 \geq 0$$

η ισότητα ισχύει μόνο όταν μηδενίζουν ταυτόχρονα δηλ $x = \frac{3\pi}{4}$