ΒΑΚΑΛΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
από το 1967

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΥΛΗ : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΟΤΗΤΕΣ 1.1 – 1.3)

3 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΙΘΑΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ & Δ

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\Re$, με $g(x)>0$ για κάθε $x>0$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f\circ g$ είναι ¨1-1¨.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι ¨1-1¨.

Γ2. Να λυθεί η εξίσωση : $g\big(f(x)+\ln x-1\big)=g\big(f(x)-x\big)$

Γ3. Αν για κάθε $x>0$ ισχύει : $f(e^{x-2})=\dfrac{1}{e^{x-2}}-x+2$, να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$, με $x>0$.

Γ4. Να λυθεί η ανίσωση : $\dfrac{1}{x^2+5}-\dfrac{1}{2x^2+1}<\ln\dfrac{x^2+5}{2x^2+1}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ :

Γ1. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ είναι :

$$g(x_1)=g(x_2)\overset{*}{\Rightarrow}f\big(g(x_1)\big)=f\big(g(x_2)\big)\Rightarrow(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\overset{f\circ g\text{ "1–1"}}{\Rightarrow}x_1=x_2$$ αρά η g είναι ¨1-1¨

[* $g(x_1),g(x_2)\in A_f=(0,+\infty)$]

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΒΑΚΑΛΗ"

Γ2. $g\big(f(x)+\ln x-1\big)=g\big(f(x)-x\big)\overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(x)+\ln x-1=f(x)-x\Leftrightarrow \ln x+x-1=0$.

Έστω $h(x)=\ln x+x-1$, με $\mathrm{A}_h=(0,+\infty)$, έχω να λύσω την εξίσωση : $h(x)=0$ (1)

Παρατηρώ ότι $h(1)=0$ άρα η $x=1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$ (1)

Επίσης έστω $x_1,x_2\in \mathrm{A}_h$ με :

$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2$ (2)

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2),(3) και έχω :

$\ln x_1+x_1-1<\ln x_2+x_2-1\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$

Άρα η $h\uparrow$ για κάθε $x\in \mathrm{A}_h=(0,+\infty)$, οπότε η $x=1\in(0,+\infty)$ είναι και μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

Γ3. Είναι : $f(e^{x-2})=\dfrac{1}{e^{x-2}}-x+2$ για κάθε $x>0$. Θέτω $e^{x-2}=u$ με $u>0$

Άρα : $e^{x-2}=u\Leftrightarrow \ln e^{x-2}=\ln u\Leftrightarrow (x-2)\ln e=\ln u\Leftrightarrow x-2=\ln u\Leftrightarrow x=\ln u+2$ με $u>0$

Άρα $f(e^{x-2})=\dfrac{1}{e^{x-2}}-x+2\Leftrightarrow f(u)=\dfrac{1}{e^{\ln u+2-2}}-(\ln u+2)+2\Leftrightarrow f(u)=\dfrac{1}{e^{\ln u}}-\ln u-2+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(u)=\dfrac{1}{u}-\ln u$, $u>0$ άρα τελικά : $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x}$, $x>0$.

Γ4. $\dfrac{1}{x^2+5}-\dfrac{1}{2x^2+1}<\ln\dfrac{x^2+5}{2x^2+1}$ η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\Re$, έτσι έχω :

$\dfrac{1}{x^2+5}-\dfrac{1}{2x^2+1}<\ln(x^2+5)-\ln(2x^2+1)\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+5}-\ln(x^2+5)<\dfrac{1}{2x^2+1}-\ln(2x^2+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2+5)<f(2x^2+1)$ (4)

[για να ορίζεται η ανίσωση (4) πρέπει $\begin{cases}x^2+5>0\\ 2x^2+1>0\end{cases}$ *που ισχύει για κάθε* $x\in\Re$ *άρα η ανίσωση (4) ορίζεται για κάθε* $x\in\Re$*]*

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με :

$x_1<x_2\Rightarrow \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}$ (5)

$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow -\ln x_1>-\ln x_2$ (6)

Προσθέτω κατά μέλη τις (5) και (6) και έχω : $\dfrac{1}{x_1}-\ln x_1>\dfrac{1}{x_2}-\ln x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε :

$f(x^2+5)<f(2x^2+1)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x^2+5>2x^2+1\Leftrightarrow x^2-4<0\Leftrightarrow x\in(-2,2)$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΒΑΚΑΛΗ"

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει :

$$f\left(f(x)\right)+f^3(x)=2x+3 \text{ για κάθε } x\in\Re$$

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» .

Γ2.Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f\left(g(x)-x\right)-f\left(\ln x-1\right)=0$ για κάθε $x>0$. Αφού δείξετε ότι $g(x)=\ln x+x-1$, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)$.

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση : $g^{-1}\left(2g\left(|x|+1\right)-2e\right)=1$

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση : $x^2-4<\ln\dfrac{x^2+7}{2x^2+3}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ :

Έχω : $f\left(f(x)\right)+f^3(x)=2x+3$ (1) ισχύει για κάθε $x\in\Re$

Γ1. Έστω $x_1,x_2\in\Re$ με :

- $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f\left(f(x_1)\right)=f\left(f(x_2)\right)$ (2)
- $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3) έχω :

$f\left(f(x_1)\right)+f^3(x_1)=f\left(f(x_2)\right)+f^3(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι «1-1» .

Γ2. $f\left(g(x)-x\right)-f\left(\ln x-1\right)=0\Leftrightarrow f\left(g(x)-x\right)=f\left(\ln x-1\right)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow g(x)-x=\ln x-1\Leftrightarrow g(x)=\ln x+x-1$ με $D_g=(0,+\infty)$.

Για τις <u>ρίζες</u> της $g(x)=\ln x+x-1$:

$g(x)=0\Leftrightarrow\ln x+x-1=0$, παρατηρώ ότι $g(1)=0$ άρα η $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$. Θα δείξω τώρα ότι η g είναι γνησίως μονότονη ώστε να είναι και μοναδική.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με :

- $x_1<x_2\Rightarrow\ln x_1<\ln x_2$ (4)
- $x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1$ (5)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) , (5) έχω : $\ln x_1+x_1-1<\ln x_2+x_2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_g=(0,+\infty)$ και άρα η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΒΑΚΑΛΗ"

Για το <u>πρόσημο</u> της $g(x)=\ln x+x-1$:

Όταν : $x<1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)<g(1) \Rightarrow g(x)<0$

Όταν : $x>1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)>g(1) \Rightarrow g(x)>0$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Γ3. Έχω να λύσω την εξίσωση :

$$g^{-1}\left(2g\left(|x|+1\right)-2e\right)=1 \Leftrightarrow g\left(g^{-1}\left(2g\left(|x|+1\right)-2e\right)\right)=g(1) \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2g\left(|x|+1\right)-2e=0 \Leftrightarrow$$

$$2g\left(|x|+1\right)=2e \Leftrightarrow g\left(|x|+1\right)=e \overset{g(e)=\ln e+e-1 \Leftrightarrow g(e)=e}{<=======>}$$

$$\Leftrightarrow g\left(|x|+1\right)=g(e) \overset{g\uparrow \Rightarrow g:1-1}{<===>} |x|+1=e \Leftrightarrow |x|=e-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=e-1 \\ \dot{\eta} \\ x=1-e \end{array}\right.$$

Γ4. Έχω να λύσω την ανίσωση :

$$x^2-4<\ln\frac{x^2+7}{2x^2+3} \Leftrightarrow x^2-4<\ln(x^2+7)-\ln(2x^2+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x^2+3)+2x^2+3<\ln(x^2+7)+x^2+7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x^2+3)+2x^2+3-1<\ln(x^2+7)+x^2+7-1 \Leftrightarrow g(2x^2+3)<g(x^2+7) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3<x^2+7 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow x\in(-2,2)\,.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΒΑΚΑΛΗ"

ΘΕΜΑ Δ

Δινεται συναρτηση $f:\Re\to\Re$ ώστε : $f(x-y)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Δ3. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2-2x)+f(x+2)=f(4x-4)$

Δ5. Αν $f(x)>0$ για κάθε $x<0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ :

Δ1. Στη σχεση : $f(x-y)=f(x)-f(y)$ (1) που ισχύει για κάθε $x,y\in\Re$, θέτω $x=y=0$ και έχω : $f(0)=f(0)-f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$, άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ2. Στη σχεση : $f(x-y)=f(x)-f(y)$ θέτω $x=0$ και έχω :
$f(-y)=f(0)-f(y)\Leftrightarrow f(-y)=-f(y)$ για κάθε $y\in\Re$, άρα η f είναι περιττή.

Δ3. Αφου η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα και από Δ1. $f(0)=0$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.
Εστω $x_1,x_2\in\Re$ με :

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}f(x_1-x_2)=0\Rightarrow x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$$

(επειδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$)
Άρα η f «1-1» και άρα f αντιστρέψιμη.

Δ4. Η εξίσωση $f(x^2-2x)+f(x+2)=f(4x-4)$ ορίζεται για κάθε $x\in\Re$. Έτσι έχω :

$$f(x^2-2x)+f(x+2)=f(4x-4)\Leftrightarrow f(x^2-2x)=f(4x-4)-f(x+2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow f(x^2-2x)=f(4x-4-x-2)\Leftrightarrow f(x^2-2x)=f(3x-6)\overset{f:'1-1'}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x=3x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2\quad\acute{\eta}\quad x=3$$

Δ5. Έστω $x_1,x_2\in\Re$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1-x_2<0$ όμως για κάθε $x<0$ είναι $f(x)>0$

Άρα επειδή $x_1-x_2<0$ είναι και $f(x_1-x_2)>0\overset{(1)}{\Rightarrow}f(x_1)-f(x_2)>0\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in\Re$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΒΑΚΑΛΗ"