ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4. **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$f:\Re \to \Re \qquad f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x},\ x\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Β1. Στη σχέση (1) θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1\ ,u\in\mathbb{R}$.
Άρα η (1) γίνεται: $f(u)=u\cdot e^{1-u}\ ,u\in\mathbb{R}$.
Επομένως, $f(x)=x\cdot e^{1-x}\ ,x\in\mathbb{R}$

Β2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με :

$$f'(x)=e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}(1-x)'=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=e^{1-x}(1-x)\quad ,x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)=0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$\nearrow$	Μέγιστο	$\searrow$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$ και η f συνεχής στο 1, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$.

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και η f συνεχής στο 1, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1$.

Β3. Κυρτότητα – Σημεία καμπής :

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f' παραγωγίσιμη με : $f''(x)=e^{1-x}(1-x)'(1-x)+e^{1-x}(-1)\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f''(x)=-e^{1-x}(1-x)-e^{1-x}\Leftrightarrow f''(x)=e^{1-x}(-1+x-1)\Leftrightarrow f''(x)=e^{1-x}(x-2)$
  $f''(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)=0\Leftrightarrow x=2$.
  Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f		Σ.Κ.	

Οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη) στο $(-\infty,2]$ και προς τα άνω (κυρτή) στο $[2,+\infty)$. Επειδή η f'' μηδενίζεται στο 2 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, το σημείο $\mathrm{A}\left(2,f(2)\right)$ ή $\mathrm{A}\left(2,\dfrac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Ασύμπτωτες :

- Η f είναι συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Για πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες ψάχνουμε στο $\pm\infty$
  Στο $-\infty$:
  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to+\infty}}{\overset{1-x=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty,$$
  Άρα η C_f δεν έχει πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$.
  Στο $+\infty$:
  $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\dfrac{1}{e^{1-x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$$
  Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Συνεπώς δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Β4. i) Έστω $\mathrm{A}_1=(-\infty,1]$. Η f είναι συνεχής στο A_1 και $f\uparrow \mathrm{A}_1$, οπότε:

$$f(\mathrm{A}_1)=(\lim_{x\to-\infty}f(x),\,f(1)]=(-\infty,1]$$

διότι, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot e^{1-x})=-\infty$ καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to+\infty}}{\overset{1-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$

και $f(1)=1$

Έστω $A_2=(1,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο A_2 και $f\downarrow A_2$, οπότε:

$f(A_2)=(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x))=(0,1)$

διότι, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (υπολογισμένο στο ερώτημα Β3)

και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1$ καθώς η f είναι συνεχής στο 1.

Επομένως, $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$.

ii) Από το Σύνολο Τιμών της f προκύπτει ότι :

- Αν $\lambda\in(-\infty,0)$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μία μοναδική ρίζα, καθώς $\lambda\in f(A_1)$ με $f\uparrow A_1$ ενώ $\lambda\notin f(A_2)$.
- Αν $\lambda=0$, η εξίσωση $f(x)=\lambda \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει μία μοναδική ρίζα, την $x=0$.
- Αν $\lambda\in(0,1)$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, καθώς $\lambda\in f(A_1)$ με $f\uparrow A_1$ και $\lambda\in f(A_2)$ με $f\downarrow A_2$.
- Αν $\lambda=1$, η εξίσωση $f(x)=\lambda \Leftrightarrow f(x)=1$ έχει μία μοναδική ρίζα, την $x=1$, καθώς η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο στο $x_0=1$ το $f(1)=1$, δηλαδή $f(x)\le f(1)\Leftrightarrow f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=1$.
- Αν $\lambda\in(1,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ δεν έχει καμία ρίζα, καθώς $\lambda\notin f(A_1)$ και $\lambda\notin f(A_2)$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^3-3x^2-x+1 &, \ x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x &, \ 0<x\le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad \text{με } \alpha<-3$$

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική

Η f είναι συνεχής στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\alpha x^3-3x^2-x+1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1 \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \\ \acute{\alpha}\rho\alpha \text{ f συνεχής στο 0} \end{array}$$

Άρα η f συνεχής στο $D_f=\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Εξετάζω παραγωγισιμότητα στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \quad \text{άρα η } f \text{ όχι παραγωγίσιμη στο 0}$$

Γ2.

i. f συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ αφού f συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$

f παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

$f(0)=1$ και $f(\frac{3\pi}{2})=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$

$f(0)\neq f(\frac{3\pi}{2})$

άρα η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

ii. Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$: $f'(x)=-\eta\mu x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

Όμως $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ άρα $\left.\begin{array}{r} 0<\kappa\pi<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa<\frac{3}{2} \\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow \kappa=1$

Άρα $x=\pi$ η λύση της εξίσωσης $f'(x)=0$

Άρα $\xi=\pi$ μοναδική λύση.

Γ3. Έστω $x_0<0$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)$

να είναι παράλληλη στον $x'x$, δηλ $f'(x_0)=0$

Για $x<0$: $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1$

Έστω $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2-6x-1=0$, $\Delta=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0$ αφού $\alpha<-3$

άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη για $x<0$

άρα δεν υπάρχει σημείο της C_f με αρνητική τετμημένη

στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον $x'x$

Γ4. $f(x)=\begin{cases} \alpha x^3-3x^2-x+1 &, \ x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x &, \ 0<x\le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ με $\alpha<-3$

Για $x<0$: $f'(x)=3ax^2-6x-1$

Έστω $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2-6x-1=0$, $\Delta=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0$ αφού $\alpha<-3$

άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x<0$

Για $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$: $f'(x)=-\eta\mu x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\pi$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\eta\mu x>0 \Leftrightarrow \eta\mu x<0 \overset{x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -\eta\mu x<0 \Leftrightarrow \eta\mu x>0 \Leftrightarrow 0<x<\pi$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
f'	−	−	0	+
f	↘	↘		↗

- η f συνεχής $(-\infty,\pi]$ με $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,\pi)$

  f συνεχής στο 0

  άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\pi]$

- η f συνεχής $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ με $f'(x)>0$ στο $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

  άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\pi$ το $f(\pi)=\sigma\upsilon\nu\pi=-1$

άρα $f(x)\ge -1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$

Έστω : $\mathrm{T}(x) = \ln x - \frac{1}{x},\ x > 0$

Η T είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $\frac{1}{x}$

$\mathrm{T}(1) = -1 < 0$

$\mathrm{T}(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

άρα $\mathrm{T}(1) \cdot \mathrm{T}(e) < 0$

Οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε :

$\mathrm{T}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$

$\mathrm{T}'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε x>0

και η Τ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα η Τ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e) \subseteq (0, +\infty)$ άρα η Τ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(1, e)$

Τελικά η Τ(x) έχει μια ακριβώς ρίζα $x_0 \in (1, e)$

Δ2.

$f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1 \quad x>0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με :

$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} \quad x>0$

$\overset{\Delta.1}{=} \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x \cdot x_0}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x \cdot x_0} = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

$f'(x) > 0 \overset{x \cdot x_0 > 0}{\Leftrightarrow} x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0$

$f'(x) < 0 \overset{x \cdot x_0 > 0}{\Leftrightarrow} x - x_0 < 0 \Leftrightarrow x < x_0$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	↘	Ελάχιστο	↗

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o το

$f(x_0)=0$ διότι $f(x_0)=(\ln x_0)(x_0+1)-\ln x_0-1=x_0\cdot\ln x_0-1\overset{\Delta.1}{=}0$

Δ3. $g(x)=x\cdot e^{-x}$ $x\in\mathbb{R}$ $\kappa\alpha\iota$ $h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ $x\in\mathbb{R}$

$g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}$ καθώς $\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}>0$, άρα : $x\cdot e^{-x}>0\Leftrightarrow x>0$, έτσι έχουμε :

$$\ln\left(x\cdot e^{-x}\right)=\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\cdot(\ln x_0-\ln e)\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\cdot\ln x_0-(x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\ln x_0)\cdot(x+1)-\ln x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0\overset{\Delta.2}{\Leftrightarrow}x=x_0$$

Καθώς η f παρουσιάζει ελάχιστο, μόνο στο x_o το $f(x_0)=0$

Συνεπώς : $g(x_0)=h(x_0)$

Είναι : $g'(x)=e^{-x}+xe^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(1-x)$

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$g'(x_o)=h'(x_o)\Leftrightarrow e^{-x_o}(1-x_o)=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\cdot\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-x_o}{e^{x_o}}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\cdot(\ln x_o-1)\Leftrightarrow\frac{1-x_o}{e^{x_o}}=\frac{x_o^{x_o+1}}{e^{x_o}\cdot e}(\ln x_o-1)\Leftrightarrow$$

$$\overset{\Delta.1}{\Leftrightarrow}e\cdot(1-x_o)=x_o^{x_o+1}\cdot\left(\frac{1}{x_o}-1\right)\Leftrightarrow e\cdot(1-x_o)=x_o^{x_o}\cdot(1-x_o)\overset{x_o\neq1}{\Leftrightarrow}e=x_o^{x_o}\Leftrightarrow 1=x_o\ln x_o\Leftrightarrow \ln x_o=\frac{1}{x_o}$$

Που ισχύει απο Δ1. Καθώς το x_o είναι μοναδικό, οι C_f $\kappa\alpha\iota$ C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Έστω $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)>\varphi(x)$ για κάθε $x>0$

$\mathrm{A}\left(x, f(x)\right)$ και $\mathrm{B}\left(x,\varphi(x)\right)$, $x>0$

$(\mathrm{AB})=\sqrt{(x-x)^2+\left(f(x)-\varphi(x)\right)^2}=\left|f(x)-\varphi(x)\right|=f(x)-\varphi(x),\ \ \mathrm{x}>0$

Έστω $\mathrm{d(x)}=f(x)-\varphi(x),\ \ \mathrm{x}>0$

Είναι $\mathrm{d(x)}\geq\mathrm{d(x_0)}\ \ \mathrm{x}>0$

$\Leftrightarrow f(x)-\varphi(x)\geq f(x_o)-\varphi(x_o)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-f(x_o)\geq\varphi(x)-\varphi(x_o)\quad (1)$

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(1,e)$ τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(1,e)$ τότε :

<u>Α΄ τρόπος</u>

Η d παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0

Το x_0 εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$

Η d είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat :

$\mathrm{d}'(\mathrm{x}_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)-\varphi'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\varphi'(x_0)\overset{\Delta.2}{\Leftrightarrow}\varphi'(x_0)=0$

και το x_o είναι κρίσιμο σημείο της φ.

<u>Β΄ τρόπος</u>

Είναι :

$$\varphi'(\mathrm{x}_0)=\lim_{x\to x_o^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_o)}{x-x_o}\quad (\mathrm{A})$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)=\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\quad (\mathrm{B})$$

Για :

$x>x_0\Leftrightarrow x-x_0>0$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$$

$$\overset{(\mathrm{A}),(\mathrm{B})}{\Rightarrow}\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$$

$\Rightarrow f'(x_0)\geq\varphi'(x_0)\Rightarrow$

$\overset{\Delta.2}{\Rightarrow} 0\geq\ \varphi'(x_0)\quad (2)$

Για :

$x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$

$\overset{(A),(B)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$

$\Rightarrow f'(x_0) \leq \varphi'(x_0) \Rightarrow$

$\overset{\Delta.2}{\Rightarrow} 0 \leq \varphi'(x_o) \quad (3)$

Από (2) και (3) $\varphi'(x_0) = 0$ και το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.