



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 186

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142-143

A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 161

A4.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

B1. Για να ορίζεται η συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, 1]$$

Οπότε, $D_h = [0, 1]$

$$\text{και } h(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x^2} - 1)^2 = (x - 1)^2, \quad x \in [0, 1].$$

B2. $h(x) = (x-1)^2, x \in [0,1]$

- Έστω $x_1, x_2 \in D_h = [0,1]$, με

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \begin{matrix} \xrightarrow{x_1, x_2 \in D_h = [0,1]} \\ \xrightarrow{x_1 - 1 \leq 0} \\ \xrightarrow{x_2 - 1 \leq 0} \end{matrix} -x_1 + 1 = -x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η συνάρτηση h είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

- Για κάθε $x \in [0,1]$ θέτω $h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \Leftrightarrow -x+1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}, y \geq 0$.

Όμως, $x \in [0,1]$ άρα πρέπει:

$$1 - \sqrt{y} \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{y} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{y} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} \leq 1 \\ \sqrt{y} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in [0,1].$$

Επομένως, $h(x) = y \Leftrightarrow h^{-1}(y) = x \Leftrightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}, y \in [0,1]$.

Οπότε, $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$

2ος τρόπος:

$h(x) = (x-1)^2, x \in [0,1]$. Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = 2(x-1) < 0$, για $x \in [0,1)$ και $h'(1) = 0$. Η h είναι συνεχής στο 1 άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Οπότε, εφόσον h συνεχής στο $[0,1]$ και h γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ έχουμε:

$$h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [0,1] = D_{h^{-1}}$$

B3. $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1], \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, x = 1 \end{cases}$

i. Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Στο } x_0 = 1 : \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \varphi(1) = \frac{1}{2}$, δηλαδή η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Οπότε :

- Η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $\varphi(0) = 1$

$$\varphi(1) = \frac{1}{2} \text{ δηλαδή } \varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Επομένως για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii. Για κάθε $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{\pi}{6} < \eta\mu \alpha < \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu \alpha < 1 \Leftrightarrow \varphi(1) < \eta\mu \alpha < \varphi(0)$

Οπότε, εφόσον η φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu \alpha$.

2ος τρόπος:

Θεωρούμε συνάρτηση $\kappa(x) = \varphi(x) - \eta\mu \alpha, x \in [0,1]$ και εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$$

Για $x < -1$: $f'(x) = -2 = (-2x)'$

Σύμφωνα με Συνέπειες ΘΜΤ. $f(x) = -2x + c_1$ για $c_1 \in \mathbb{R}$

Για $x > -1$: $f'(x) = 3x^2 - 1 = (x^3 - x)'$

Σύμφωνα με Συνέπειες ΘΜΤ. $f(x) = x^3 - x + c_2$ για $c_2 \in \mathbb{R}$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$, Άρα $f(x) = x^3 - x$, για $x > -1$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x < -1 \\ c_3, & x = -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} άρα συνεχής και στο -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow -2 + c_1 = 0 = c_3$$

Άρα $c_1 = -2$ και $c_3 = 0$ οπότε $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ με } x_0 > -1$$

Η (ε) τέμνει τον $y'y$ στο -2 άρα το σημείο $B(0, -2) \in \varepsilon \Leftrightarrow -2 - f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(-x_0) \Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Άρα η εξίσωση της (ε): $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$

Γ3. $\varepsilon: y = 2x - 2$, με $x > 2$

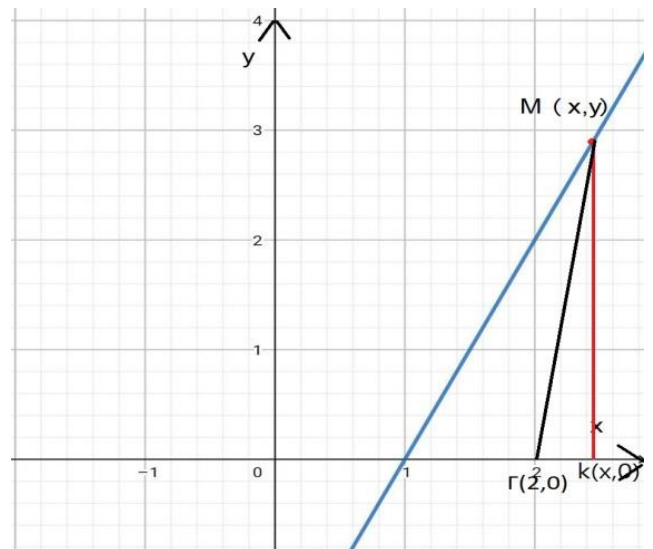
$$E = \frac{1}{2}(MK)(K\Gamma) = \frac{1}{2}|y| \cdot |x - 2| =$$

$$= \frac{1}{2}|2x - 2| \cdot |x - 2| \stackrel{x > 2}{=} \frac{1}{2}(2x - 2)(x - 2) = (x - 1)(x - 2)$$

Άρα $E(t) = (x(t) - 1)(x(t) - 2)$

Παραγωγίζω τη σχέση :

$$E'(t) = x'(t)(x(t) - 2) + x'(t)(x(t) - 1)$$



Τη χρονική στιγμή $t = t_0$

$$x'(t_0) = 2 \frac{\text{μον}}{\text{δευτ}} \quad \text{και} \quad x(t_0) = 3$$

οπότε $E'(t_0) = 2(3-2) + (3-1)2 = 2 + 4 = 6$ τετρ.μον./δευτ

Γ4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 1$

διότι:

- για το 1^ο όριο :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}, \text{ θέτω } \frac{1}{f(x)} = \omega \text{ και } f(x) = -2x - 2 \text{ με } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = +\infty$$

άρα όταν $x \rightarrow -\infty$, το $\omega \rightarrow 0$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{\omega} \right) = 0$$

2^{ος} τρόπος:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$$

διότι:

$$\left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \Leftrightarrow - \left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) + \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(- \left| \frac{1}{f(x)} \right| \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = 0$$

από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$

- για το 2^ο όριο :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 - u}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1$$

καθώς θέτω $-x = u$, όταν $x \rightarrow -\infty$ το $u \rightarrow +\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) $f(x) = x - \ln(3x)$, $x > 0$

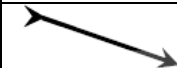
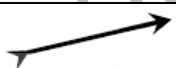
$$f'(x) = 1 - \frac{3}{3x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1 - \ln 3 < 0 \text{ (αφού } e < 3 \text{ άρα } \ln e < \ln 3 \text{ οπότε } 1 < \ln 3)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1, \text{ αφού } x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f		Ελαχ.	

Έστω $A_1=(0, 1]$ και $A_2=(1, +\infty)$.

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_1 άρα $f(A_1)=[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) \stackrel{u=3x}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+, u \rightarrow 0^+} \left(\frac{u}{3} - \ln u \right) = 0 - (-\infty) = +\infty, \text{ οπότε } f(A_1)=[1-\ln 3, +\infty).$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A_2 άρα $f(A_2)=\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right] = +\infty(1 - 0) = +\infty \text{ διότι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3x}}{1} = 0 \text{ οπότε } f(A_2)=(1-\ln 3, +\infty).$$

Το $0 \in f(A_1)$ και αφού f γνησίως φθίνουσα στο A_1 υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.
 Το $0 \in f(A_2)$ και αφού f γνησίως αύξουσα στο A_2 υπάρχει μοναδικό $x_2 \in A_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$.
 Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (αφού $f(1) \neq 0, x_1 < 1$).

ii)
 $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2.

$$x_1 \leq x \leq 1 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) \geq f(x) \geq 1 - \ln 3, \text{ άρα } f(x) \leq 0,$$

$$1 \leq x \leq x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 1 - \ln 3 \leq f(x) \leq f(x_2), \text{ άρα } f(x) \leq 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και
 η $f(x) \leq 0$ στο $[x_1, x_2]$, καθώς $f(x) = 0 \stackrel{\Delta 1.}{\Leftrightarrow} x = x_1 \text{ ή } x = x_2$

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln(3x) - x) dx = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln(3x) dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = [x \ln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \frac{3}{3x} dx - \left[\left(\frac{x^2}{2} \right) \right]_{x_1}^{x_2} = \\
 &= (x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1)) - \int_{x_1}^{x_2} 1 dx - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}
 \end{aligned}$$

Επειδή από Δ1 $f(x_1)=0=f(x_2)$ έχουμε $\ln(3x_1) = x_1, \ln(3x_2) = x_2$
 και $\int_{x_1}^{x_2} 1 dx = [x]_{x_1}^{x_2} = x_2 - x_1$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 E &= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} = \\
 &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = \\
 &= (x_2 - x_1) \left[(x_2 + x_1) - 1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_1) \right] = \\
 &= (x_2 - x_1) \left[\frac{1}{2}(x_2 + x_1) - 1 \right] = \\
 &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} -f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} -(x)' f(x) dx = -[x f(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} x f'(x) dx = 0 + \int_{x_1}^{x_2} x \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \\
 &\int_{x_1}^{x_2} (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{x_1}^{x_2} = \dots
 \end{aligned}$$

Δ3.

Από Δ1 έχουμε $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$

Από Δ2 και επειδή $E > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$ συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε $1 < 2 - x_1 < x_2$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Έχουμε : $f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$.

Δ4. $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow (f(x) - f'(x_2)(x - x_2)) + (f(x) - f(1)) = 0$ (1)

Η εφαπτομένη ϵ της C_f στο $A(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση :

$\epsilon: y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$

Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ με το " $=$ " μόνο για $x = x_2$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$, άρα $f(x) \geq f(1)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, με το " $=$ " μόνο για $x=1$.

Η (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f'(x_2)(x - x_2) \\ \text{και} \\ f(x) - f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \\ \text{και} \\ x = 1 \end{cases}$. Συνεπώς η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο $(0, +\infty)$.