ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. (σελίδα 111 σχολικό βιβλίο)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Α2. (σελίδα 104 σχολικό βιβλίο**)**

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to \alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to \beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in \mathbb{R}.$$

Α3. (σελίδα 128-129 σχολικό βιβλίο**)**

ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

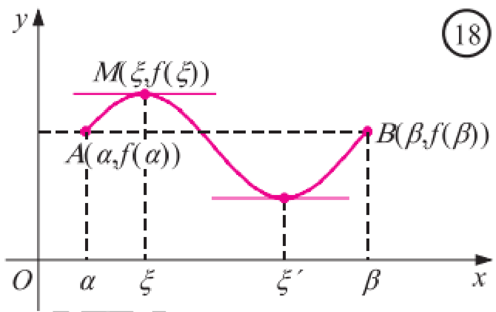
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



Α4.

α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$D_g = \Re$

$D_h = (0, +\infty)$

$$D_f = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x \in \Re \end{array} \right\} = (0, +\infty)$$

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$$

Β2.

i) $$f'(x) = \frac{(4 - x^2)' x - (4 - x^2)(x)'}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = -\frac{x^2 + 4}{x^2} < 0$$

για κάθε x>0 και η f είναι συνεχής, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii) $$\pi > e \xrightarrow{f\downarrow} f(\pi) < f(e) \Rightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \xrightarrow{\frac{\pi}{4 - e^2} < 0} \Rightarrow \frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}.$$

Β3. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως ρητή.

Κατακόρυφες ασύμπτωτες :

$$\lim_{\chi\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(4-x^2\right)\frac{1}{x}\right] \overset{4(+\infty)}{=} +\infty$$

διότι : $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(4-x^2\right)=4$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): x=0$ (ο άξονας y΄y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Πλάγιες/οριζόντιες ασύμπτωτες :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Β4.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=0$ (1)

για x>0 είναι $\left|\frac{1}{f(x)}\right|>0$ και επομένως από την ανισότητα :

$\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|\leq 1$ έχουμε ισοδύναμα ότι :

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) και κριτήριο παρεμβολής έχουμε το ζητούμενο όριο

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=0$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3\,, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha \,, & x\geq 1 \end{cases} \quad , \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad D_f=\mathbb{R}.$$

Γ1. Γνωρίζουμε ότι $\int_2^3 xf(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 x(\frac{1}{x}+\alpha)dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx=1 \Leftrightarrow \left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3+\alpha\frac{9}{2}-2-\alpha\frac{4}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0$.

Οπότε, $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3\,, & x<1 \\ \dfrac{1}{x} \,, & x\geq 1 \end{cases}$

Γ2. i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

- $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x-2)=-1$
- $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, με $f'(1)=-1$. Άρα ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0=1$.

ii) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι:
(ε): $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-1(x-1) \Leftrightarrow y-1=-x+1 \Leftrightarrow y=-x+2$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x΄x, με $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, για την οποία ισχύει $\varepsilon\varphi\omega=f'(1) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1 \Leftrightarrow \omega=\frac{3\pi}{4}$.

Γ3. Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική
- Η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως ρητή
- Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ ως παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Οπότε, η f είναι συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$.

Για $x<1$: $f'(x)=2x-3$

έχουμε $x<1 \Leftrightarrow 2x<2 \Leftrightarrow 2x-3<-1 \Leftrightarrow f'(x)<0$

Για $x>1$: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Δηλαδή, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

διότι :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και

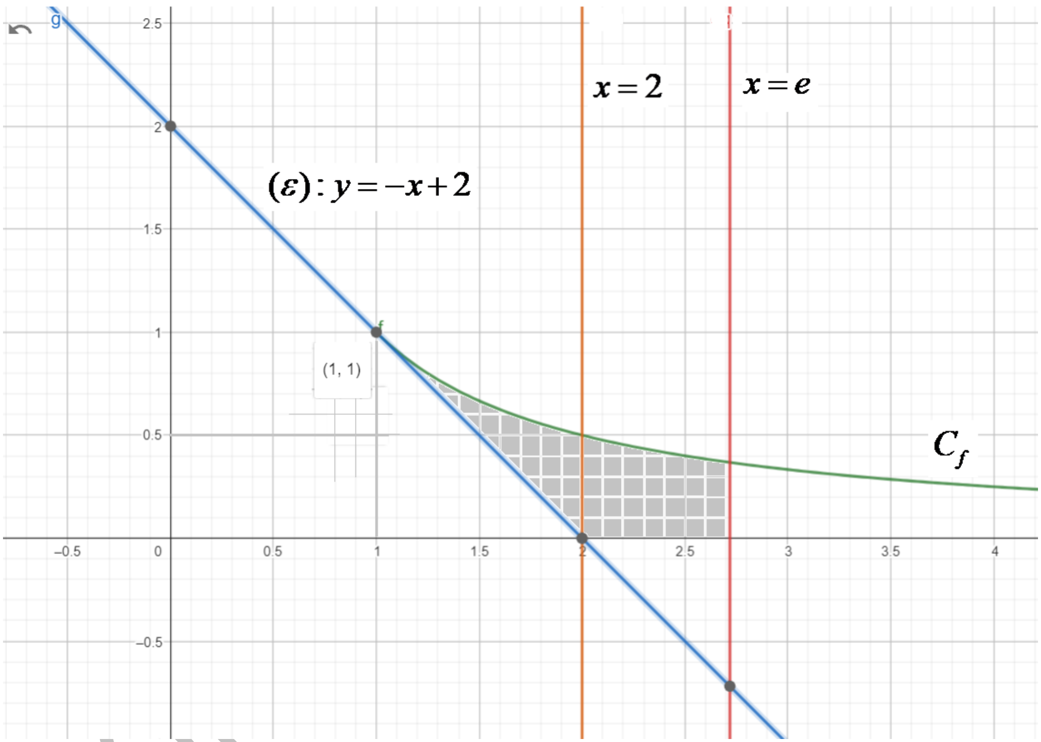
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

Γ4. Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από :
C_f , $(\varepsilon): y = -x + 2$, άξονα x΄x και την ευθεία $x = e$.

Για $x \geq 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $(\varepsilon): y = -x + 2 = g(x)$

Για $x = 0$: $y = 2$

Για $y = 0$: $y = 2$



Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[1, e]$, άρα η $f - g$ είναι συνεχής στο $[1, e]$.
Έχουμε $(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$ καθώς η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$ άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη, για κάθε $x \in [1, +\infty)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή το $x_0 = 0$. Επομένως $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και το $"="$ ισχύει μόνο για $x = 1$. Οπότε : $\mathrm{E}(\Omega) = \int_1^2 \left(f(x) - g(x) \right) dx + \int_2^e f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx =$

$$= \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + \left[\ln x \right]_2^e = \ln 2 + \frac{4}{2} - 4 - \ln 1 - \frac{1}{2} + 2 + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$, $x\neq 1$ $\;με\;$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\ell\in\mathbb{R}$

$f(x)=(x-1)g(x)+2x$, κοντά στο 1,

άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\big((x-1)g(x)+2x\big)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim\limits_{x\to 1} g(x)+\lim\limits_{x\to 1} 2x=0\cdot\ell+2 \quad (1)$

όμως $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+k\right)=\ln 1-1+k=-1+k \quad (2)$

από (1) $και$ (2) : $-1+k=2\Leftrightarrow k=3$

Δ2. Η $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με : $f'(x)=\dfrac{-1}{2-x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{-x^2+2-x}{(2-x)\cdot x^2}=\dfrac{-x^2-x+2}{(2-x)\cdot x^2}=\dfrac{x^2+x-2}{(x-2)\cdot x^2}=\dfrac{x+2}{(x-2)\cdot x^2}\cdot(x-1)$

Για $x\in(0,2)$ είναι $\dfrac{x+2}{(x-2)\cdot x^2}<0$

Η f είναι συνεχής στο $(0,2)$ και

- $f'(x)>0$ $\;για\;$ $x\in(0,1)$
  $άρα\; f\; γνησίως\; αύξουσα\; στο\,(0,1]$

- $f'(x)<0$ $\;για\;$ $x\in(1,2)$
  $άρα\; f\; γνησίως\; φθίνουσα\; στο\,[1,2)$

x	0		1		2
f'		+	0	-	
f		↗		↘	

- $\left.\begin{array}{l} D_1=(0,1] \\ f\; συνεχής\; και \nearrow \end{array}\right\}\Rightarrow f(D_1)=(\lim\limits_{x\to 0} f(x), f(1)]$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3\right)=-\infty \quad καθώς \quad \lim\limits_{x\to 0}(\ln(2-x)+3)=\ln 2+3 \quad και \quad \lim\limits_{x\to 0}(-\dfrac{1}{x})=-\infty$

$f(1)=2$

Άρα $f(D_1)=(-\infty,2]$

$0\in f(D_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in D_1=(0,1]$ ώστε $f(x_1)=0$, $x_1\neq 1\;\; καθώς\;\; f(1)=2$

f γνησίως αύξουσα στο $D_1=(0,1]$ άρα x_1 μοναδικό.

- $\left.\begin{array}{l} D_2=(1,2) \\ f\; συνεχής\; και \searrow \end{array}\right\}\Rightarrow f(D_2)=(\lim\limits_{x\to 2} f(x),\lim\limits_{x\to 1} f(x))=(-\infty,2)$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3\right)=-\infty$

$καθώς\;\; \lim\limits_{x\to 2}\ln(2-x)=\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$, $\;διότι\;\; θέτω\;\; u=2-x\;\; όταν\;\; x\to 2^-\;\; το\;\; u\to 0^+$

$0\in f(D_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in D_2=(1,2)$ ώστε $f(x_2)=0$

f γνησίως αύξουσα στο $D_2=(1,2)$ άρα x_2 μοναδικό.

Για να δείξω ότι $x_1 < \frac{1}{3}$

$0 < x_1 < \frac{1}{3} \overset{f\nearrow x\in(0,1)}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\left(2-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 \Leftrightarrow 0 < \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 \Leftrightarrow 0 < \ln\frac{5}{3}$ που ισχύει καθώς $\frac{5}{3} > 1$

Δ3. Ζητάμε $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

- η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ καθώς εκφράζεται από συνεχείς συναρτήσεις
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ καθώς εκφράζεται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \overset{f(x_1)=0}{=} \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Επίσης $f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$, άρα $f' \searrow (0,2)$, επομένως το ξ είναι μοναδικό.

Δ4.

i. Εφόσον οι F και G είναι αρχικές της f στο (0,2) ισχύει : $F(x) = G(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$
για $x = x_1$, $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow G(x_1) = -c$
για $x = x_2$, $F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow F(x_2) = c$
άρα $G(x_1) = -F(x_2) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii. Θεωρούμε $H(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x$, $x \in (0,2)$.

- Η H είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, καθώς οι F και G είναι συνεχείς ως παραγωγίσιμες
- $H(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2G(x_1) + x_1 - x_2$,
  έχουμε :
  $F(x_2) + G(x_1) = 0 \Leftrightarrow F(x_2) = -G(x_1)$
  $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ καθώς :

$$\left.\begin{aligned} x_1 < x \le 1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x) \\ 1 < x < x_2 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0 \end{aligned}\right\} \text{άρα } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2)$$

η F είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, άρα

$F \nearrow [x_1, x_2]$, έτσι :

$x_1 < x_2 \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Leftrightarrow 0 < F(x_2) \overset{F(x_2)=-G(x_1)}{\Leftrightarrow} 0 < -G(x_1) \Leftrightarrow G(x_1) < 0 \overset{x_2>0}{\Leftrightarrow} x_2\, G(x_1) < 0$ και

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$

Τελικά : $H(x_1) = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$

- $H(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1$,
  καθώς :
  $x_1 < x_2 \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Leftrightarrow 0 < F(x_2) \overset{x_1>0}{\Leftrightarrow} x_1\, F(x_2) > 0$
  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$
  Τελικά : $H(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$

Άρα $H(x_1) \cdot H(x_2) < 0$ οπότε σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $H(x_0) = 0$.

Επιπλέον : $H'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0 \quad για \quad κάθε\, x \in (x_1, x_2)$

οπότε $H \nearrow (x_1, x_2)$ άρα x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $H(x) = 0$ στο (x_1, x_2).