Άσκηση 1

Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\kappa\cdot x+\left|z+\frac{1}{\bar{z}}\right|-\sqrt{\kappa\cdot x^2+\left|z+\frac{1}{\bar{z}}\right|\cdot x+\lambda}$$

Όπου $\kappa\rangle 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

i) Να δείξετε ότι: $\kappa=1$ και $\left|z+\frac{1}{\bar{z}}\right|=2$

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z

iii) Να δείξετε ότι: $\frac{1+z^{\nu}}{1+\bar{z}^{\nu}}=\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right)^{\nu}$

Άσκηση 2

α) Να δείξετε ότι αν $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

β) Να δείξετε ότι αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

γ) Για τις συναρτήσεις f και g ισχύει

$$\frac{-|z-1|^2x^2+1}{x^2+1}\le f^2(x)-2|z-1|f(x)\le\frac{-|z-1|^2x^2+3}{x^2+2}\quad x\in\mathbb{R}$$

και $g(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}\ \eta\mu\frac{|z-4|}{x}\quad x\neq 0$

Να βρεθούν τα: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-2f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\eta\mu\frac{2}{x}}{x^2+1}$

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z

Άσκηση 3

i) Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z+w)=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)$

ii) Έστω $z\in\mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\left(z-a^2-a-2\right)\rangle 0 \quad a\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $|z-1|\langle |z+1|$

β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

όπου $\forall x\in\mathbb{R}$

$f^3(x)-2|z-1|f^2(x)+|z+1|^2 f(x)=x^{2013}+x^{2011}-1$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα.