



**Επαναληπτικές ασκήσεις Γ Λυκείου Μαθηματικά**  
**Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια**

- 1) Αν για την συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι:
- α)  $|f(x)| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- β) Η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

2) Έστω συνεχής συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε  $f(x) \neq x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 1$ .

α) Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$ .

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παίρνει ελάχιστη τιμή.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f^2(x) - x}{x - 1} + \frac{f(x) - x - 2}{x - 2} = 0$$

Έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1,2)$ .

3) Δίνονται οι συναρτήσεις  $g, h$  με τύπους:

$$g(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 30x + 95}}{4} - \frac{\lambda}{4}(3x + 5) \quad \mu\epsilon \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$h(x) = \frac{4x - 5}{3}$$

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f = goh$  ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και έχει τύπο:

$$f(x) = (goh)(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x$$

β) για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$  να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

γ) για την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ , για την οποία το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  είναι πραγματικός αριθμός, να υπολογίσετε την τιμή των ορίων:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+2x}{x^4+x-14}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu^3 x}{f(x)+x}$$

Φροντιστήρια Βακάνη