

**Άσκηση στα όρια**

Δίνεται η  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x > 0 \quad e^{f(x)}(f^2(x) - f(x) + 3) = x \quad (1)$$

α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

β. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  και ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f^2(a) - f(a) + 3)g(t)}{t} = af^2\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t}\right) - af\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t}\right) + 3a, a > 0$$

να βρεθεί το  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t}$ .

γ. Αν επιπλέον για τη  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  του (β) ερωτήματος ισχύει  $g(g(x)) = g(x) + 2x$

i) να βρεθεί η τιμή του  $a$  του (β) ερωτήματος

ii) να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + 2g(-x) - x^3 \eta \mu \frac{1}{x}}{g(x^2 + x) + \eta \mu x}$ .