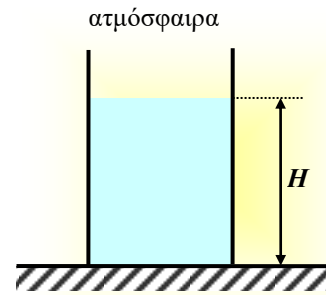


Ένα δοχείο κυλινδρικού σχήματος αμελητέας μάζας με εμβαδό βάσης $A=100\text{cm}^2$ περιέχει νερό μέχρι ύψους $H=0,5\text{m}$. Η ελεύθερη επιφάνεια του δοχείου είναι σε επαφή με την ατμόσφαιρα. Από την κάτω πλευρά του δοχείου που εφάπτεται με το δάπεδο επιτρέπεται να μπαίνει ατμοσφαιρικός αέρας.

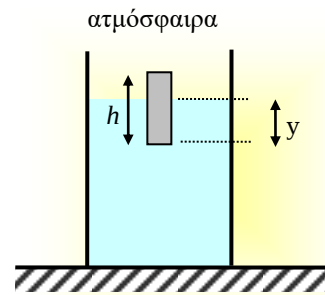


Σχήμα 1

i) Υπολογίστε την πίεση στον πυθμένα του δοχείου και την δύναμη που δέχεται από το ρευστό.

ii) Βρείτε τη δύναμη επαφής που δέχεται ο πυθμένας από το δάπεδο.

Στη συνέχεια βυθίζουμε έναν κύλινδρο μάζας $m_k=0,3\text{kg}$ πυκνότητας $\rho_{\text{κυλ}}=750\text{kg/m}^3$ και εμβαδού βάσης $A_k=20\text{cm}^2$ στο νερό, και αυτός επιπλέει βυθισμένος κατά y .



Σχήμα 2

iii) Να υπολογίσετε το ύψος h του κυλίνδρου και το ύψος y που βυθίζεται στο νερό.

iv) Βρείτε πόσο ανυψώνεται η στάθμη του νερού στο δοχείο λόγω της βύθισης του κυλίνδρου.

v) Υπολογίστε την νέα τιμή της πίεσης στον πυθμένα του δοχείου και βρείτε πόσο μεταβάλλεται η δύναμη που δέχεται από το ρευστό.

Δίνεται $P_{\text{atm}}=10^5\text{Pa}$, η πυκνότητα του νερού $\rho_v=10^3\text{kg/m}^3$ και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

i)

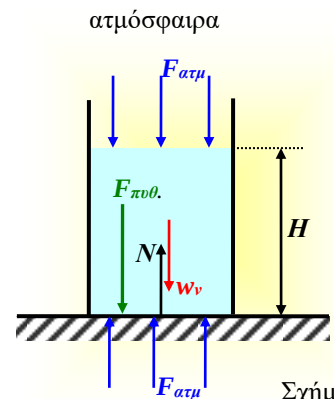
$$P_{\text{πυθ.}} = \rho_v g H + P_{\text{atm}} = 10^3 \cdot 10 \cdot 0,5 + 10^5 = 1,05 \cdot 10^5 \text{Pa}$$

$$F_{\text{πυθ.}} = P_{\text{πυθ.}} \cdot A = 1,05 \cdot 10^5 \cdot 0,01 = 1050 \text{N}$$

ii) Για το σύστημα δοχείο–νερό:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{0} \Rightarrow F_{\text{ατμ}}^{(+)} + N - w_v - F_{\text{ατμ}} = 0 \Rightarrow N = w_v \Rightarrow$$

$$N = \rho_v \cdot A \cdot H \cdot g = 1000 \cdot 0,01 \cdot 0,5 \cdot 10 \Rightarrow N = 50 \text{N}$$



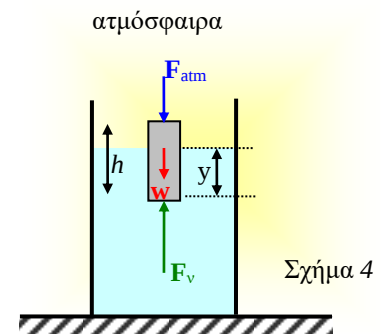
Σχήμα 3

$$\text{ή } \sum \vec{F}_{\text{πυθ}} = \vec{0} \Rightarrow F_{\text{ατμ}}^{(+)} + N - F_{\text{πυθ}} = 0 \Rightarrow 1000 + N - 1050 = 50 \text{N}$$

iii)

$$m_k = \rho_k V_k \rightarrow m_k = \rho_k A_k h \rightarrow h = m_k / (\rho_k A_k) \rightarrow h = 0,2 \text{m}$$

Από την ισορροπία του κυλίνδρου:



Σχήμα 4

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F}_{y, \varepsilon \zeta} &= \vec{0} \Rightarrow F_v - F_{\alpha \tau \mu} - w = 0 \Rightarrow \\ p_v A_k - p_{\alpha \tau \mu} A_k - \rho_k V_k g &= 0 \Rightarrow \\ (\rho_v g y + p_{\alpha \tau \mu}) A_k - p_{\alpha \tau \mu} A_k - \rho_k A_k h g &= 0 \Rightarrow \\ \rho_v g y A_k - \rho_k A_k h g &= 0 \Rightarrow \\ \rho_v g y A_k &= \rho_k A_k h g = w_{\kappa \nu \lambda}. \quad (1)\end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) με αντικατάσταση προκύπτει:

$$y = \frac{\rho_k h}{\rho_v} = \frac{750 \frac{kg}{m^3} 0,2m}{1000 \frac{kg}{m^3}} \Rightarrow y = 0,15m$$

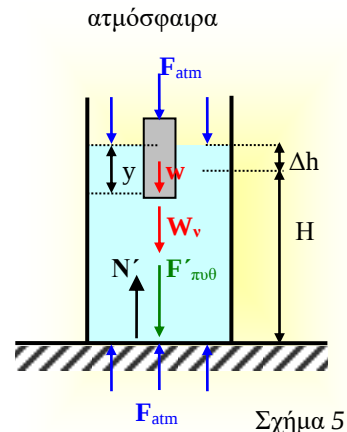
iv) Η ανύψωση της στάθμης του νερού είναι ίδια με αυτή που θα είχαμε αν αντί να βάλουμε τον κύλινδρο στο δοχείο, χύναμε μέσα στο δοχείο νερό με όγκο ίσο με τον όγκο του κυλίνδρου που είναι βυθισμένος στο νερό, (εκτόπισμα).

Ο όγκος του κυλίνδρου που βυθισμένος στο νερό είναι ίσος με $V_{\beta \nu \theta} = A_k \cdot y$ και ο όγκος του νερού που ανυψώνεται $A \cdot \Delta h$. Έτσι η ανύψωση της στάθμης ισούται με:

$$\begin{aligned}A_k \cdot y &= A \cdot \Delta h \rightarrow (2) \\ \Delta h &= A_k \cdot y / A = 0,03m = 3cm\end{aligned}$$

Εναλλακτικά ο όγκος του νερού πριν την τοποθέτηση του κυλίνδρου είναι $V_1 = A \cdot H$, ενώ μετά την τοποθέτηση του κυλίνδρου εκφράζεται ως $V_2 = A(H + \Delta h) - A_k \cdot y$. Προφανώς οι όγκοι V_1 και V_2 είναι ίσοι λόγω της ασυμπίεστότητας του νερού. Έτσι:

$$V_1 = V_2 \rightarrow A \cdot H = A(H + \Delta h) - A_k \cdot y \rightarrow A \cdot \Delta h = A_k \cdot y$$



v) Η πίεση στον πυθμένα είναι:

$$P'_{\pi \nu \theta} = \rho_v g (H + \Delta h) + P_{\text{atm}} = 10^3 \cdot 10 \cdot 0,53 + 10^5 = 1,053 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Και η δύναμη

$$F'_{\pi \nu \theta} = P'_{\pi \nu \theta} \cdot A = 1,053 \cdot 10^5 \cdot 0,01 = 1053 \text{ N}$$

$$\Delta F = F'_{\pi \nu \theta} - F_{\pi \nu \theta} = 3 \text{ N}$$

Σχόλιο

Η επιπλέον δύναμη που δέχεται ο πυθμένας ισούται αριθμητικά με το βάρος του κυλίνδρου.

Στο δοχείο με το νερό και τον κύλινδρο προκύπτει:

$$F'_{\pi \nu \theta} = P'_{\pi \nu \theta} \cdot A \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 F'_{\pi\theta} &= [\rho_v g(H + \Delta h) + P_{\text{atm}}]A \rightarrow \\
 F'_{\pi\theta} &= [\rho_v g \cdot H \cdot A + P_{\text{atm}} \cdot A] + \rho_v g \cdot \Delta h \cdot A \Rightarrow^{(2)} \\
 F'_{\pi\theta} &= [w_v + P_{\text{atm}} \cdot A] + \rho_v g \cdot y \cdot A_k \Rightarrow^{(1)} \\
 \mathbf{F}'_{\pi\theta} &= \mathbf{F}_{\pi\theta} + \mathbf{w}_{\text{κυλ}}
 \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι λογικό αρκεί να δούμε το νερό ως στερεό σώμα γι' αυτό ας το παγώσουμε!!! Αν τοποθετήσουμε πάνω στον πάγο τον κύλινδρο, τότε παίρνοντας διαδοχικά τις ισορροπίες των σωμάτων η αύξηση της δύναμης που δέχεται ο πυθμένας ισούται αριθμητικά με το βάρος του κυλίνδρου.

Ομοίως και για τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο.

Για το σύστημα δοχείο–νερό–κύλινδρος.

$$\begin{aligned}
 \Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} &= \vec{0} \Rightarrow^{(+)\uparrow} \\
 F_{\alpha\tau\mu} + N' - w_v - w_{\text{κυλ}} - F_{\alpha\tau\mu} &= 0 \Rightarrow \\
 N' &= w_v + w_{\text{κυλ}}
 \end{aligned}$$

Επιπλέον η αύξηση της πίεσης ισούται με w_k/A .

$$\begin{aligned}
 F'_{\pi\theta} &= F_{\pi\theta} + w_{\text{κυλ}} \rightarrow \\
 P'_{\pi\theta} \cdot A &= P_{\pi\theta} \cdot A + w_{\text{κυλ}} \rightarrow \\
 P'_{\pi\theta} &= P_{\pi\theta} + w_{\text{κυλ}}/A
 \end{aligned}$$