



### Άσκηση στη συνέχεια συνάρτησης

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  για την οποία ισχύει:

$$e^{2f(x)} - x^2 = 2e^{f(x)+x} - e^{2x} + 1, x \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{f(x)}}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{f(x)} + x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} + e^{-f(x)} \eta\mu f(x) \right)$$

γ) Να βρείτε την εικόνα του διαστήματος  $\Delta = [0, +\infty)$  μέσω της συνάρτησης  $f$  και να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 > 0$  τέτοιο ώστε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - 2023}$  να μην υπάρχει.

δ) Να βρείτε το μοναδικό σημείο τομής της  $C_f$  με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία παρουσιάζει μέγιστο το  $\ln 2$ , μόνο στο 0.