ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1) α) Έστω δύο συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες σε κάποιο διάστημα Α τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f+g είναι γνήσιως αύξουσα στο Α.

β) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 5+4

Α2) α) Πότε μια συνάρτηση $f: A \to R$ καλείται 1-1;

β) Για τις συναρτήσεις f,g ισχύει $fog = gof$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Α3) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1) Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στην γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο Ν(β,α) ανήκει στην γραφική παράσταση της f^{-1}

2) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση -f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

3) Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f ειναι το διάστημα (α,β) τότε η f δεν εχει

ελάχιστο ούτε μέγιστο

4) Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2}$ και $g(x)=x$ είναι ίσες.

5) Μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της ,αν για κάθε $x_1,x_2 \in A$ με $x_1 = x_2$ προκύπτει $f(x_1)=f(x_2)$.

6) Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$ τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$

7) Αν f,g, είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα τότε η gof ορίζεται αν $f(A)\cap B \neq \varnothing$

Μονάδες 4+5+7

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x\leq 1 \\ 2x+1 & \mathrm{x}>1 \end{cases}$$

Α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της

Β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την $f^{-1}(x)$

Γ) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .

Δ) Έστω συνάρτηση $g: R \to R$ για την οποία ορίζεται στο R η συνάρτηση fog και είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε και ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

Ε) Αν $g(x)=x^2+2$, $\mathrm{x} \geq -1$ να βρεθεί η συνάρτηση gof.

Μονάδες 6+6+4+3+6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R με συνολο τιμών το R για την οπία ισχύει

$$f^3(x)+f(x)=-2x \quad \text{για κάθε } x\in R$$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη της.

Γ) Να λυθούν οι ανισώσεις

1. $f(x)>2$
2. $f\left(f\left(x^2\right)+1\right)>-1$

Δ) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(e^x+2x\right)-f\left(2-e^x\right)=0$

Μονάδες 3+3+5+4

Γ2.

Δίνεται η συνάρτηση $f:[-3,+\infty)\to R$ με $f(x)=x^2+6x+7$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να ορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 5+5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: R \to R$ και $g(x) = -x+2$ για τις οποίες ορίζεται στο R η fog και έχει τύπο $(fog)(x) = e^{x-2} + x - 3$

Α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1 \quad x \in R$

Β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση fof

Δ) Να λύσετε τις ανισώσεις

Δ1) $e^{-x^3} - e^{-x^2} < x^3 - x^2$

Δ2) $f\left(f(x)+1\right) > \dfrac{1-2e}{e}$

Ε) Να αποδίξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $h: R \to R$ για την οποία να ισχύει ότι $f\left(h(x)\right) = g(x)$ για κάθε $x \in R$

Μονάδες 4+3+2+4+4

Δ2.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{e^x + 1} + \ln x$

Να λύσετε τις ανισώσεις- εξισώσεις

α) $\sqrt{e^{9x}+1} + \ln 9 + \ln x > 3 + \ln(\ln 8)$

β) $\sqrt{x+1} + \ln(\ln x) = f\left(\dfrac{e}{x}\right)$

Μονάδες 4+4

Καλή επιτυχία