ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2021

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ :

1^{Ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ : (ΕΝΟΤΗΤΕΣ 1.1 – 1.3 ΜΕΧΡΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ ΠΑΥΛΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ ολικό ελάχιστο;

Μονάδες 3

Α2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση (Μονάδες 2) και στη συνέχεια να αιτιολογήσετε την απάντηση σας (Μονάδες 2).

«Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε :

Α. $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$. **Β.** $(f \circ g)(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.»

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i) Αν μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

ii) Αν η συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε ισχύει : $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, $x \in \mathrm{A}$.

iii) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y=x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

iv) Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι «1-1», αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

v) Μία συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

Μονάδες 10

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=(x-1)^2+2$, $x\in[1,+\infty)$.

Β1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και ότι παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 2.

Μονάδες 4

Β2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $f\left(f(x)-1\right)=2$ **ii.** $f(x)+\left|x^2-x\right|=2$

Μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 5

Β4. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}, δεν έχουν κοινά σημεία με την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 4

Β5. Αν επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x)=2-\ln x$, να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $e^{f(x)}+f(x)-x=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}. (Μονάδες 4)
Στη συνέχεια αν $f^{-1}(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ με τον άξονα συμμετρίας τους. (Μονάδες 2)

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 5

Γ3. Να λυθεί η ανίσωση : $f(x)+e^x<f(e)-f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(\left|\eta\mu x\right|\right)-f\left(\left|x\right|-\sigma\upsilon\nu x\right)=f\left(\left|x\right|-\sigma\upsilon\nu x+1\right)-f\left(\left|\eta\mu x\right|-1\right)$.

Μονάδες 5

Γ5. Αν επιπλέον δίνεται η συνάρτηση : $g(x)=f^{-1}\left(\ln(x+2)\right)-2\sqrt{x}-\ln(x+2)$, $x\geq 0$ να προσδιορίσετε τη συνάρτηση : $(g\circ g)(x)$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $(g\circ g)(x)=x$, για κάθε $x\in[0,1]$.

Μονάδες 5

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x|}{x^3}$, $x\neq 0$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στα διαστήματα : $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι η αντίστροφη είναι η $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{x}, & x>0\\ \dfrac{\sqrt{-x}}{x}, & x<0\end{cases}$.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Μονάδες 5

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει : $f(\ln x)+f\left(\ln\dfrac{x}{2}\right)<f\left(\ln\dfrac{x}{3}\right)+f\left(\ln\dfrac{x}{4}\right)$.

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή. Στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση : $f\left((2x-1)^{2014}\right)+f\left((1-2x)^{2015}\right)+f\left((2x-1)^{2016}\right)+f\left((1-2x)^{2017}\right)=0$ για $x>\dfrac{1}{2}$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

2. Να απαντήσετε **στην κόλλα σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

3. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

4. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ