



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω δυο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει  $f(x) = g(x) + c$

**Μονάδες 6**

**A2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = a^x \ln a$ , δηλαδή:  $(a^x)' = a^x \ln a$ .

**Μονάδες 5**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$  τότε υποχρεωτικά ισχύει  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ ».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

(Μονάδες 3)  
**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**Μονάδες 10**

- i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $M(x_0, f(x_0))$  δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της  $f$ .
- ii) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο ανοικτό  $(\alpha, \beta)$  και υπάρχει ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$ , τότε ισχύει πάντα ότι  $f(\alpha) = f(\beta)$ .
- iii) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathfrak{R}$  και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , στο οποίο η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- iv) Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ .
- v) Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , είναι σταθερή στο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1} & 0 < x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}, \alpha \in \mathfrak{R}.$

**B1.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

**Μονάδες 4**

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**Μονάδες 5**

**B3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

**B4.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  (Μονάδες 3) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$f\left(f(x) + \frac{1}{\pi}\right) = 1, \text{ έχει ακριβώς μια ρίζα. (Μονάδες 3)}$$

Μονάδες 6

**B5.** Να υπολογίσετε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{f(x^2) - f(x)}$ .

Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) + 2f'(x) + (e^{-x} + 1) \cdot f''(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = \frac{1}{2}$$

**Γ1.** Να δείξετε ότι συνάρτηση  $g(x) = (e^x + 1)f(x) - e^x + 1$  είναι σταθερή .

Μονάδες 5

**Γ2.** Να δείξετε ότι συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

**Γ3.** Να δείξετε ότι συνάρτηση αντιστρέφεται να βρεθεί η  $f^{-1}(x)$  και να λυθεί η εξίσωση

$$f(\ln x + f^{-1}(x)) = \frac{2x-1}{2x+1}$$

Μονάδες 5

**Γ4.** Αν  $x > 0$  να λυθεί η εξίσωση

$$(x-1) \cdot (e^{1-x} + 1) - (x+1) \cdot (e^{1-x} - 1) = 0$$

Μονάδες 5

Γ5. Αν  $F$  αρχική της  $f$  τότε να δείξετε ότι

$$F(3x) + F(2x) < F(4x) + F(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν

$$(1+x^2) \cdot (f(x) - f'(x)) = 2xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

Δ1. Να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$  και να υπολογιστούν τα όρια

A1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f^2(x) \cdot \left( \sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} - 1 \right) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι

B1) η ευθεία  $y = -x$  τέμνει την  $C_f$  ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη  $x_1 \in (-1, 0)$

B2) Υπάρχει  $x_2 \in (x_1, 0)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_2) + \frac{1}{x_1} = -1$

Μονάδες 5

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση  $f(x^4 + 1) = f(2e^{x^2-1})$

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\ln^2 x + 1}$  έχει ακριβώς μια ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα  $(1, e)$ .

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{f(2x) - f(x)}$

Μονάδες 5

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ