



ΕΧΤΡΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

(μονάδες 4)

A2. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

(Μονάδες 6)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

1) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

2) Ισχύει $|\eta \mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$, κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

4) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

5) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$.

(Μονάδες 10)

A4. Να αποδείξετε την παρακάτω πρόταση

Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

α) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β.

B1. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^2(x) + 2 \leq \frac{1}{\sin^2 x} + 2f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

(μονάδες 6)

B2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{h} = 3$

Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h}$.

(μονάδες 5)

B3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot f(x)) = 2$. Να βρείτε τα όρια

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot \eta\mu x) \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{f(x)} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} ((\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot f(x))$$

(μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a, a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$(x-1) \cdot f(x) \leq x^2 + x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Τότε να αποδείξετε ότι $a=3$.

(μονάδες 5)

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

1) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και ότι η f είναι περιττή.

(μονάδες 6)

2) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ τότε να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$

(μονάδες 4)

3) Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ τότε να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(μονάδες 5)

Γ3. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) - \eta\mu(x-1)}{x-1} = 1$$

τότε να βρείτε την τιμή $f(2)$.

(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Έστω η συνάρτηση $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$f(x) \geq (2-a)x - \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in (-1,1) \quad (1)$$

1) Να αποδείξετε ότι $a=1$.

(μονάδες 4)

2) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$

(μονάδες 3)

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A = (0, +\infty)$ και $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

(μονάδες 3)

2) Να βρείτε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x^2 + x + 1) - 2}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) - 2}$

(μονάδες 8)

Δ3. Αν για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

Τότε να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2f(x) + 3g(x)}{f^2(x) + g^2(x)}$

(μονάδες 7)

Καλή επιτυχία!!!