ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$

Μονάδες 6

Α2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή : $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$.

Μονάδες 5

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Μονάδες 10

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f.

ii) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α, β) και υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, τότε ισχύει πάντα ότι $f(\alpha) = f(\beta)$.

iii) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

iv) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$.

v) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{x-1} & 0 < x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$, $\alpha \in \Re$.

Β1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 4

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}\big(1, f(1)\big)$.

Μονάδες 5

Β3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Β4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (Μονάδες 3) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f\left(f(x) + \dfrac{1}{\pi}\right) = 1$, έχει ακριβώς μια ρίζα. (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Β5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{f\left(x^2\right)-f\left(x\right)}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει ότι

$f(x)+2f'(x)+\left(e^{-x}+1\right)\cdot f''(x)=1$ για κάθε $x\in R$ με $f(0)=0$ και $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

Γ1. Να δείξετε ότι συνάρτηση $g(x)=\left(e^{x}+1\right)f(x)-e^{x}+1$ είναι σταθερή .

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι συνάρτηση αντιστρέφεται να βρεθεί η $f^{-1}(x)$ και να λυθεί η εξίσωση

$f\left(\ln x+f^{-1}(x)\right)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$

Μονάδες 5

Γ4. Αν $x>0$ να λυθεί η εξίσωση

$$(x-1)\cdot\left(e^{1-x}+1\right)-(x+1)\cdot\left(e^{1-x}-1\right)=0$$

Μονάδες 5

Γ5. Αν F αρχική της f τότε να δείξετε ότι

$F(3x)+F(2x)<F(4x)+F(x)$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: R \to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν

$\left(1+x^2\right)\cdot\left(f(x)-f'(x)\right)=2xf(x)$ για κάθε $x \in R$ και $f(0)=1$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ και να υπολογιστούν τα όρια

Α1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Α2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)}-1\right)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι

Β1) η ευθεία $y=-x$ τέμνει την C_f ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $x_1 \in (-1,0)$

Β2) Υπάρχει $x_2 \in (x_1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)+\dfrac{1}{x_1}=-1$

Μονάδες 5

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x^4+1\right)=f\left(2e^{x^2-1}\right)$

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{\ln^2 x+1}$ έχει ακριβώς μια ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα $(1,e)$.

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{f(2x)-f(x)}$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ