



2 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΕΧΡΙ ΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

2.6 : ΣΥΝΕΠΤΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ. - ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο (ΕΠΙΠΕΔΟ : ΘΕΜΑ Β)

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1} & 0 < x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

A. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$f\left(f(x) + \frac{1}{\pi}\right) = 1, \text{ έχει ακριβώς μια ρίζα.}$$

Ε. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{f(x^2) - f(x)}.$

ΘΕΜΑ 2^ο (ΕΠΙΠΕΔΟ : ΘΕΜΑ Γ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f(x) \cdot (f(x) - 1) \neq 0$ για κάθε $x > 0$.
- $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot |f(x) - 1| - (x - \ln x) \cdot f'(x) = (f(x) - 1) \cdot (x - \ln x)$
- $f(1) = 1 + \frac{1}{e}$

A. Να δείξετε ότι : $f(x) = \frac{x - \ln x}{e^x} + 1, x > 0$.

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

Γ. Αν δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, να δείξετε ότι η εξίσωση : $f\left(f(x) - \frac{1}{2020}\right) - 1 = \frac{1}{e}$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

Δ. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+2h) + g(x) - 2g(x+h)}{h^2} = e^x + 6x$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ και η εφαπτομένη της C_g στο $N(0, g(0))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon) : y = x + 2$. Να δείξετε ότι : $g''(x) = e^x + 6x, x \in \mathfrak{R}$ και στη συνέχεια ότι : $g(x) = e^x + x^3 + 1, x \in \mathfrak{R}$.

Ε. Ένα υλικό σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = g(x)$, με $x = x(t), y = y(t) \quad t \geq 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το M περνάει από το σημείο $B(0, 2)$ η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $l = (OM)$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το B .