Επαναληπτικές Ασκήσεις στο κεφάλαιο των Συναρτήσεων

Α)ΔΙΝΕΤΑΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ΜΕ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$,ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΙΣΧΥΕΙ

$e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=e^x$,ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x\in\mathbb{R}$ (1)

1)ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΤΕ ΟΤΙ $x-f(x)\geq\ln 2$,ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x\in\mathbb{R}$.

2)ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΤΕ ΟΤΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f ΑΝΤΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΚΑΙ ΝΑ ΒΡΕΙΤΕ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ.

3)ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΤΕ ΟΤΙ Η $C_{f^{-1}}$ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ $y=x$ ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x\in\mathbb{R}$.

4) ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x\in\mathbb{R}$,ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ $A(x,f(x)),B(f(x),x)$ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ f ΚΑΙ f^{-1} ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ.ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΤΕ ΟΤΙ $(AB)\geq\sqrt{2}\ln 2$.

Β)ΔΙΝΕΤΑΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f:A\to\mathbb{R}$,ΜΕ $A=(0,+\infty)$ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΙΣΧΥΕΙ

$f\left(e^x-1\right)=x$ ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x>0$.

1)ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ Ο ΤΥΠΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f.

ΓΙΑ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΝΑ ΘΕΩΡΗΣΕΤΕ ΟΤΙ $f(x)=\ln(x+1)$

2)ΝΑ ΔΕΙΞΕΤΕ ΟΤΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $g(x)=f(x+1)-f(x),x>0$

ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ.

3)ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ

$$f\left(e^x+x\right)+f\left(e^{x^2}+x^2-1\right)=f\left(e^{x^2}+x^2\right)+f\left(e^x+x-1\right),x>0$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

Γ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$

$f^2(x)=1+2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

1)Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\sqrt{1+x^2}+x$.

2)Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\kappa}{x+1}+\dfrac{\lambda}{x+2}\right)\cdot f(x)=2$

Όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}^*$ τέτοιοι ώστε $\kappa+\lambda=1$.

3)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)-x}{x-a}+\dfrac{1+2xf(x)}{x-\beta}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a,β).

4)Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$

i)Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης g και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii)Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g\left(g(x)\right)\geq\sqrt{2}$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ