ΘΕΜΑ Α.

Α)Να διατυπωθεί το θεώρημα Rolle.

(Μονάδες 5)

Β)Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Μέσης Τιμής.

(Μονάδες 4)

Γ)Να αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα ''έστω μια συνάρτηση f ,η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ''.

(Μονάδες 6)

Δ)Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

1)Α ν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)-f(\beta)=0$,τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$,τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

2)Αν $\alpha<\beta$ και $f(\alpha)<f(\beta)$,τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)>0$

3)Έστω $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{0\}$ και η συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=0$, για κάθε $x\in\mathrm{A}$.Τότε η f είναι σταθερή στο A

4)Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι αντιστρέψιμη ,τότε υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$,ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x

5)Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β.

Α)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(10)=42$ και

$$f'(x^3+x)=\frac{4x(3x+1)}{3x^2+1}$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1)Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M\left(-10, f(-10)\right)$

(Μονάδες 6)

2)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)=3x^2-f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-2,2\right)$

(Μονάδες 7)

Β)Μια ευθεία με αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης στρέφεται γύρω από το σημείο $\Sigma(1,1)$.Αν ο συντελεστής διεύθυνσής της μεταβάλλεται με ρυθμό -4 και η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία A,B ,τότε

1)να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του συντελεστή διεύθυνσης

(Μονάδες 5)

2)να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή που η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3,0)$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ.

Α)Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ με $a,b\in\mathbb{R}$. Η ευθεία $(\varepsilon): y=10x-9$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$

1)Να βρείτε τις τιμές των a,b

(Μονάδες 5)

2)Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=3x+2$ εφάπτεται στη C_f

(Μονάδες 5)

Β)Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$f(x-2)\le x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1)Να βρεθεί ο τύπος της f .

(Μονάδες 3)

2)Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτομένες της C_f στα A,B τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 5)

3)Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων κινείται στη σταθερή ευθεία με εξίσωση $y=-\dfrac{1}{2}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $f(2)=4$

1)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)f'(x)=3f'(x)+4x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1,2)$

(Μονάδες 7)

2)Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$,ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

(Μονάδες 5)

3)Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα,τότε να αποδείξετε ότι

α)υπάρχει μονάδικο $x_o\in(1,2)$,ώστε $f'(x_0)=2$

(Μονάδες 6)

β)ισχύει ότι $f(4)>8$

(Μονάδες 7)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!