ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

- Με ποιο τρόπο εξετάζουμε αν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α, β και γ;
  - Για να εξετάσουμε αν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α, β και γ, αρκεί να εξετάσουμε αν ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα, δηλαδή αν ισχύει:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

  όπου α η μεγαλύτερη πλευρά.

- Με ποιο τρόπο βρίσκω μια προβολή;
  - Έστω ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ ζητείται να βρεθεί η προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΑΓ
    1) Το κοινό γράμμα των δύο πλευρών είναι το ένα άκρο της προβολής.
    2) Από το μη κοινό γράμμα της πλευράς της οποίας η προβολή ζητείται, φέρουμε κάθετη στην άλλη πλευρά. Δηλαδή από το Β φέρουμε κάθετη στην πλευρά ΑΓ. Το ίχνος Δ της καθέτου αυτής είναι το άλλο άκρο της προβολής.
       Οπότε η ζητούμενη προβολή είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ.

- Που χρησιμοποιείται το πόρισμα για το είδος της γωνίας;
  - Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία. Για το λόγο αυτό, αν συγκρίνουμε το τετράγωνο της <u>μεγαλύτερης</u> πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, θα διαπιστώσουμε αν η μεγαλύτερη γωνία είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία. Κατά συνέπεια το πόρισμα αυτό χρησιμοποιείται ώστε να ελέγξουμε αν ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο, αντίστοιχα.

Εφαρμογή

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α=9, β=6 και γ=5
β) Έστω ΑΒΓ τρίγωνο με πλευρές α=9, β=6 και γ=5. Να βρείτε:
 i) το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες
 ii) το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ
 iii) το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ.

<u>Λύση</u>
Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α. Εξετάζουμε αν ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα:

$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma \Leftrightarrow |6 - 5| < 9 < 6 + 5 \Leftrightarrow 1 < 9 < 11$, που ισχύει.

Οπότε υπάρχει τρίγωνο με πλευρές $α=9$, $β=6$, $γ=5$

i) Εφαρμόζουμε το πόρισμα για το είδος της γωνίας, δεδομένου ότι η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α.

- $α^2 = 9^2 = 81$
- $β^2 + γ^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$

$$\left.\begin{array}{l} α^2 = 9^2 = 81 \\ β^2 + γ^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61 \end{array}\right\} \quad α^2 > β^2 + γ^2 \Leftrightarrow A > 90^o$$

Επομένως το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο

ii) Για να βρούμε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ, θα εφαρμόσουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα για την πλευρά ΑΓ, η οποία βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία Β.
Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε η ζητούμενη προβολή είναι η ΒΔ.
Έχουμε: $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 + ΑΒ^2 - 2ΒΓ*ΒΔ \Leftrightarrow$

$$β^2 = α^2 + γ^2 – 2α * ΒΔ \Leftrightarrow 6^2 = 9^2 + 5^2 – 2 * 9\, ΒΔ \Leftrightarrow$$

$$36 = 81 + 25 – 18ΒΔ \Leftrightarrow 18ΒΔ = 70 \Leftrightarrow ΒΔ = \frac{70}{18} \Leftrightarrow ΒΔ = \frac{35}{9}$$

iii) Για να βρούμε την προβολή της πλευράς ΒΓ πάνω στην ΑΒ θα εφαρμόσουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα για την Πλευρά ΒΓ, η οποία βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία Α. Φέρουμε το ύψος ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε η ζητούμενη προβολή είναι η ΑΕ.
Έχουμε: $ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ*ΑΕ \Leftrightarrow$

$$α^2 = γ^2 + β^2 + 2γ * ΑΕ \Leftrightarrow 9^2 = 5^2 + 6^2 + 2 * 5\, ΑΕ \Leftrightarrow$$

$$81 = 25 + 36 + 10ΑΕ \Leftrightarrow 10ΑΕ = 20 \Leftrightarrow ΑΕ = 2$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Έστω ΑΒΓ ένα ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{Α}=90^o$) και ΑΔ το ύψος του. Αν ΑΒ=6 και ΒΔ=3,6 να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΑΓ, ΔΓ και ΑΔ.

<u>Λύση:</u>
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

- $ΑΒ^2 = ΒΓ * ΒΔ \Leftrightarrow 36 = ΒΓ*3,6 \Leftrightarrow ΒΓ = 10$
- $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 – ΑΒ^2 = 10^2 – 6^2 = 100 – 36 = 64 \Leftrightarrow ΑΓ = 8$
- $ΑΓ^2 = ΒΓ * ΓΔ \Leftrightarrow 64 = 10ΓΔ \Leftrightarrow ΓΔ = 6,4$
- $ΑΔ^2 = ΒΔ * ΔΓ \Leftrightarrow ΑΔ^2 = 3,6 * 6,4 \Leftrightarrow ΑΔ = 0,6 * 0,8 \Leftrightarrow ΑΔ = 4,8$

2) Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μια διάμετρο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΑΖ * ΑΓ^2 = ΑΕ * ΑΔ^2$.

Λύση:
Φέρουμε τις ΓΒ, ΔΒ
$Α\hat{Γ}Β = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ορθογώνιο με ύψος το ΓΕ.
Οπότε $ΑΓ^2 = ΑΒ * ΑΕ$
Επομένως $ΑΖ * ΑΓ^2 = ΑΖ * ΑΒ * ΑΕ$ (1)
Ομοίως $Α\hat{Δ}Β = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο με ύψος το ΔΖ.
Οπότε $ΑΔ^2 = ΑΒ * ΑΖ$
Επομένως $ΑΕ * ΑΔ^2 = ΑΕ * ΑΒ * ΑΖ$ (2)
Από τις (1), (2) $\Leftrightarrow ΑΖ * ΑΓ^2 = ΑΕ * ΑΔ^2$.

3) Έστω ΑΒΓ ένα οξυγώνιο τρίγωνο και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη αυτού.
Να αποδειχθεί ότι: $α^2 = β * ΓΔ + γ * ΒΕ$

Λύση:
Έχουμε: - $Γ < 90^o \Rightarrow γ^2 = α^2 + β^2 – 2β * ΓΔ$ (1)
- $Β < 90^o \Rightarrow β^2 = α^2 + γ^2 – 2γ * ΒΕ$ (2)
Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη, προκύπτει ότι:
$γ^2 + β^2 = 2α^2 + β^2 + γ^2 – 2β * ΓΔ – 2γ * ΒΕ \Leftrightarrow$
$2α^2 – 2β * ΓΔ - 2γ * ΒΕ = 0 \Leftrightarrow 2α^2 = 2β * ΓΔ + 2γ * ΒΕ \Leftrightarrow α^2 = β * ΓΔ + γ * ΒΕ$

4) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 120^o$. Να αποδείξετε ότι:
$α^2 = β^2 + γ^2 + βγ$

Λύση:
α΄ τρόπος:
Φέρουμε το ύψος ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή $\hat{Α} = 120^o$, τότε $Γ\hat{Α}Δ = 60^o$ ως παραπληρωματική της $\hat{Α}$, οπότε και $ΑΓΔ = 30^o$.
Επομένως $ΑΔ = \frac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΑΔ = \frac{β}{2}$ (1)
Επειδή $\hat{Α} = 120^o > 90^o \Rightarrow α^2 = β^2 + γ^2 + 2γ * ΑΔ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} α^2 = β^2 + γ^2 + 2γ * \frac{β}{2} \Leftrightarrow$
$α^2 = β^2 + γ^2 + βγ$

β΄ τρόπος:
Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:
$α^2 = β^2 + γ^2 – 2βγ * συν Α \Leftrightarrow α^2 = β^2 + γ^2 – 2βγ * συν 120 \Leftrightarrow$
$α^2 = β^2 + γ^2 – 2βγ * (-1/2) \Leftrightarrow α^2 = β^2 + γ^2 + βγ$