



2 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
(ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ)

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι :

- $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $g(e^{g(x)}) = 4 \ln x + 3$, για κάθε $x > 0$
- $(g \circ g)(e^{g(x)}) = \ln(\ln x^4 + 3)^2 + 1$ για κάθε $x > e^{-\frac{3}{4}}$

A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της .

B. Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε τον τύπο της. Στη συνέχεια να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$.

Γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1».

Δ. Να δείξετε ότι ο τύπος της g είναι : $g(x) = 2 \ln x + 1$, $x > 0$.

Ε. Αν επιπλέον δίνεται η συνάρτηση : $h(x) = \ln(f^{-1}(x))$, να ορίσετε την συνάρτηση : $(h \circ g)(x)$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x \ln x)$ και $g(x) = e^x$.

A. Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

B. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = x + \ln x$, $x > 0$ και $h((0, +\infty)) = \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι αντιστρέψιμη. Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση ϕ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, για την

οποία ισχύει : $\phi(h^{-1}(x)) = \frac{e^x}{e^x + e \cdot h^{-1}(x)}$, για κάθε $x > 0$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση : $\ln \varepsilon \phi x = \frac{\sigma \nu \nu^2 x - \eta \mu^2 x}{\sigma \nu \nu x + \eta \mu x}$, στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση : $h(e^x + x) + h(e^{x^2} + x^2 - 1) = h(e^{x^2} + x^2) + h(e^x + x - 1)$, $x > 0$.

Ε. Αν $\phi(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$, $x > 0$, είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ2. , να δείξετε ότι η συνάρτηση

ϕ είναι αντιστρέψιμη και ότι $\phi^{-1}(x) = \ln \frac{ex}{1-x}$, $x \in \left(\frac{1}{e+1}, 1\right)$.

Στη συνέχεια, αν για τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha + \alpha \cdot e^{1-x} - 1 = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.