ΛΥΣΗ ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ-ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ-ΥΠΑΡΞΗΣ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ

α)

$$\left|z-\frac{4i}{z}\right|=|z|\Leftrightarrow\left|z-\frac{4i}{z}\right|^2=|z|^2\Leftrightarrow\left(z-\frac{4i}{z}\right)\left(\overline{z}+\frac{4i}{\overline{z}}\right)=z\overline{z}\Leftrightarrow z\overline{z}+\frac{4iz}{\overline{z}}-\frac{4i\overline{z}}{z}+\frac{16}{z\overline{z}}=z\overline{z}$$

$$\Leftrightarrow 4iz^2-4i\overline{z}^{-2}+16=0\Leftrightarrow iz^2-i\overline{z}^{-2}=-4\Leftrightarrow i2i\,\mathrm{Im}\left(z^2\right)=-4\Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(z^2\right)=2$$

β) $z^2=\frac{1}{f^2(0)}+\frac{2(\ln^2 f(0)+1)i}{f(0)}-(\ln^2 f(0)+1)^2$

$$\mathrm{Im}(z^2)=\frac{2(\ln^2 f(0)+1)i}{f(0)}$$

ΟΜΩΣ

$$\mathrm{Im}(z^2)=2\Leftrightarrow\frac{2(\ln^2 f(0)+1)}{f(0)}=2\Leftrightarrow 2\ln^2 f(0)+2=2f(0)\Leftrightarrow\ln^2 f(0)-f(0)+1=0$$

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $h(x)=\ln^2 x-x+1, x>0$

ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x\in(0,+\infty)$ ΕΙΝΑΙ $h'(x)=\frac{2\ln x-x}{x}$

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\varphi(x)=2\ln x-x, x>0$

ΜΕΛΕΤΑΜΕ ΤΗ $\varphi(x)$ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ.ΔΙΑΠΙΣΤΩΝΟΥΜΕ ΟΤΙ

$\varphi(x)\le\varphi(2)=2\ln\frac{2}{e}<0$ ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x\in(0,+\infty)$

ΑΡΑ ΕΙΝΑΙ $h'(x)<0$ ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x\in(0,+\infty)$,ΣΥΝΕΠΩΣ Η h ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΑΡΑ ΚΑΙ $1-1$.ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΕΧΟΥΜΕ $h(f(0))=h(1)\Leftrightarrow f(0)=1$

γ)ΣΤΗ ΣΧΕΣΗ $f'(x)f(-x)=2,(1)$ ΘΕΤΟΥΜΕ ΟΠΟΥ x ΤΟ $-x$ ΚΑΙ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΟΤΙ $f'(-x)f(x)=2,(2)$

Βακάλης Φροντιστήρια

ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ (1) ΚΑΙ (2) ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΟΤΙ

$$f'(x)f(-x)-f'(-x)f(x)=0 \Leftrightarrow (f(x)f(-x))'=0 \Leftrightarrow f(x)f(-x)=c_1$$

ΓΙΑ $x=0$ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΟΤΙ $c_1=1$.ΑΡΑ ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x\in(0,+\infty)$ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ

$$f(x)f(-x)=1 \Leftrightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$$

ΑΡΑ ΕΧΟΥΜΕ $(1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=2 \Leftrightarrow (\ln f(x))'=(2x)' \Leftrightarrow \ln f(x)=2x+c_2, (3)$

ΓΙΑ $x=0$ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΟΤΙ $c_2=0$,ΑΡΑ $\ln f(x)=2x \Leftrightarrow f(x)=e^{2x}$

δ)ΤΟ ΟΡΙΟ ΓΙΝΕΤΑΙ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\frac{4e^{4x}}{4e^{4x}}=1$$

ε)1)ΕΙΝΑΙ $g'(x)=x^2+2e^{2x}, g''(x)=2+4e^{2x}>0$

Η g' ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ ΟΠΟΤΕ ΕΧΕΙ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΤΟ

$$g'(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}g'(x),\lim_{x\to+\infty}g'(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

ΤΟ $0\in g'(\mathbb{R})$,ΑΡΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΝΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ $x_0\in\mathbb{R}$,ΜΕ $g'(x_0)=0$,ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΑΦΟΥ Η g' ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ

2)Η g' ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ ΟΠΟΤΕ

ΓΙΑ $x<x_0$ ΕΙΝΑΙ $g'(x)<g'(x_0)=0$

ΓΙΑ $x>x_0$ ΕΙΝΑΙ $g'(x)>g'(x_0)=0$

ΑΡΑ Η g ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΣΤΟ $(-\infty,x_0]$ ΚΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ ΣΤΟ $[x_0,+\infty)$,ΟΠΟΤΕ Η g ΕΧΕΙ ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΣΤΟ x_0.

Βακάλης Φροντιστήρια