2 ΘΕΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ΄ΛΥΚΕΙΟΥ (ΜΕΡΟΣ Α)

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\sqrt{x-2}+1,\ x>0,$ και $g(x)=e^x+2,\ x\in\mathbb{R}.$

Α1. Να βρείτε την συνάρτηση fog .

Α2. Αν $(fog)(x)=\dfrac{x}{2}+1,\ x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και fog είναι 1-1 και να βρείτε την συνάρτηση f^{-1}.

Α3. Αν $f^{-1}(x)=e^{2x-2}+2,\ x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f^{-1}(x_0)+(fog)(x_0)=g(x_0).$$

Α4. Να αποδείξετε ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1) η εξίσωση

$$g'(x)=2x+e-2.$$

Α5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(3,e^2+2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $M(\rho,f(\rho))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $x-(e^2-1)y+2023=0$. (Μονάδες 5)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει

$$e^x - e^{f(x)} = e^x \cdot e^{f(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in R$$

Α1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Αν είναι $f(x) = \ln \dfrac{e^x}{e^x + 1} \quad x \in R$ τότε

Α2. να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και ότι αντιστρέφεται.

Α3. να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$, για κάθε $x \in R$

Α4. να βρείτε τα όρια

Α) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Β) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x) \right)$

Α5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} + x - 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

Α6. Να δειχθεί ότι η f δεν μηδενίζεται και στην συνέχεια να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \to -\infty} f(2018)x^3 + 3x - 2019$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ