ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1)
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

και $f\left(|z-1|^2 x\right)+f\left(|z+1|^2 x\right)\le \eta\mu 4x$

α. ΝΔΟ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\alpha x)}{x}=a \quad \alpha\neq 0$

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z

γ.
i) ΝΔΟ για οποιουσδήποτε μιγαδικούς w,v,u ισχύει
$|v+w|^2+|v+u|^2+|w+u|^2=|v|^2+|w|^2+|u|^2+|w+v+u|^2$

ii) ΝΔΟ $|v-w|^2+|v+w|^2=2\left(|v|^2+|w|^2\right)$

iii) Αν οι εικόνες των $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$
ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z του (β) ερωτήματος και επιπλέον

$|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=3$ τότε το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z_1,z_2,z_3 είναι ισόπλευρο

2)
Θεωρούμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ όπου για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f^3(x)+2f(x)+1=x$

α. ΝΔΟ f 1-1

β. Να βρεθεί η $f^{-1}(x)$

ΒΑΚΑΛΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z όταν

$$f^3\left(\left|z-f\left(13\right)-1\right|\right)-f^3\left(\left|3z-f\left(4\right)\right|\right)=\left|z-f\left(13\right)-1\right|-\left|3z-f\left(4\right)\right|$$

δ. Έστω $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ με τις εικόνες τους να ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z του (γ) ερωτήματος και επιπλέον $z_1+z_2+z_3=0$

i) ΝΔΟ

α) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$

β) $\dfrac{z_1^6+z_2^6+z_3^6}{\left(z_1z_2z_3\right)^2}\in\mathbb{R}$

γ) ΝΔΟ $\left|z-z_1\right|+\left|z-z_2\right|+\left|z-z_3\right|\geq 3$