ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Στη ***Στήλη Α*** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη ***Στήλη Β*** εξισώσεις εφαπτόμενων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1,y_1). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της ***Στήλης Α*** και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της ***Στήλης Β*** που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

Στήλη Α	***Στήλη Β***
α. $x^2 + y^2 = \rho^2$	***1.*** $yy_1 = p(x + x_1)$
β. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	***2.*** $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
γ. $y^2 = 2px$	***3.*** $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
δ. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	***4.*** $xx_1 + yy_1 = 1$
	5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν $\Gamma < 0$, τότε η εξίσωση: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο.

ii) Όλα τα σημεία της παραβολής C: $x^2 = 2py$, με $p < 0$, εκτός του O(0, 0), έχουν αρνητική τετμημένη.

iii) Μία ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με μία έλλειψη είναι πάντα εφαπτόμενη της έλλειψης.

iv) Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα y΄y σε δύο σημεία.

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

i) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1), διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

iii) Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την (1).

Β) Δίνεται ο κύκλος

$$C: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, από τα οποία οι εφαπτόμενες στον κύκλο C είναι κάθετες.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω Ρ ένα σημείο του κύκλου C : $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 5 = 0$. Αν η ευθεία ε :

$x + y - 2 = 0$ τέμνει τον κύκλο C στα σημεία Α, Β έτσι ώστε Α Β = 90°,

α) Να βρείτε το λ

β) Για λ = 2, να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του Γ(1, $2\sqrt{2}$) και μετά στο σημείο του Δ(1, $-2\sqrt{2}$).

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του σημείου Λ(3, 2) από τον κύκλο C.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η παραβολή C_1: $y^2 = 3x$ και ο κύκλος C_2 : $x^2 + y^2 = 4$.

α) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της παραβολής C_1 και του κύκλου C_2.

β) Έστω Α και Β τα σημεία τομής των C_1 και C_2. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β,

ii) τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 του κύκλου C_2 στα σημεία του Α και Β.

Extra ΘΕΜΑ

α) Δίνεται η εξίσωση:

$$(x - 1)(x - 3) + (y - 3)(y - 5) = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Σε τοπογραφικό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, τα σημεία Α(1, 3), Β(3, 3), Γ(3, 5) και Δ(1, 5) παριστάνουν τις θέσεις τεσσάρων δήμων. Να αποδείξετε ότι μπορεί να χαραχθεί περιφερειακός κυκλικός δρόμος που να διέρχεται από τους τέσσερις δήμους.

γ) Αν θεωρήσουμε ότι στο ίδιο σύστημα αξόνων του ερωτήματος *(β)*, οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου Κ για κάθε χρονική στιγμή t (με $t > 0$) είναι (t, t + 2), να βρείτε αν η γραμμή στην οποία κινείται το αυτοκίνητο Κ, συναντά τον κυκλικό περιφερειακό δρόμο και αν ναι, σε ποια σημεία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

Επιμέλεια: Καμπούρης Θεόδωρος